*مجلهٔ فیزیک کاربردی دانشگاه الزهرا (س)*
*شمارهٔ ۲، بهار و تابستان ۱۳۹۱*

# معنا شناسی ادات ربط در منطق کوانتومی

**سیاوش اسدی[۱]**
**لطف الله نبوی[۲]**

تاریخ دریافت : ۱۳۹۰/۱۲/۷
تاریخ تصویب : ۱۳۹۱/۴/۱۱

## چکیده

*در منطق کوانتومی، هر گزاره معادل با یک زیرفضای بسته هیلبرت در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، نقیض یک گزاره، معادل با مکمل متعامد یک زیرفضای بسته، ترکیب عطفی دو گزاره، معادل با اشتراک دو زیرفضای بسته و ترکیب فصلی آنها، معادل با سوپریمم دو زیرفضای بسته تعریف می‌شوند. این مقاله در تلاش است ضمن تبیین این موارد، معناشناسی ادات ربط در منطق کوانتومی را به دو صورت جبری و کریپکیایی معرفی کند و ارتباط این معناشناسی‌ها را با جهان فیزیکی تشریح نماید.*

[۱] دانشجوی دکتری فلسفه دانشگاه تربیت مدرس ( نویسنده مسئول)
[۲] دانشیار گروه فلسفه دانشگاه تربیت مدرس، siavash.asadi2000@gmail.com

**واژه های کلیدی**: منطق کوانتومی، ادات ربط، فضای هیلبرت، شبکه متعامد، تحقق جبری، تحقق کریپکیایی

**مقدمه**

آزمایش‌های متعددی نشان داده‌اند که منطق کلاسیک در حوزه کوانتوم با چالش‌هایی جدّی روبروست و نمی‌توان برای تبیین پدیده‌های کوانتومی از منطق کلاسیک استفاده کرد[۱]. بنابراین فون نویمن و بیرکهوف طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۳۶ منتشر شد، منطق جدید و غیر کلاسیکی را معرفی کردند که بتواند بدون گرفتار شدن در چالش‌های منطق کلاسیک، پدیده‌های کوانتومی را تبیین کند. برای دست‌یابی به چنین منطقی، نمی‌توان پدیده‌های جهان فیزیکی را مستقیماً به مفاهیم منطقی مرتبط ساخت؛ بلکه برای برقراری ارتباط میان جهان فیزیکی و مفاهیم منطقی، به واسطه‌ای ریاضیاتی نیاز است که مطابق آنچه فون نویمن و بیرکهوف مطرح کرده‌اند، این واسطه ریاضیاتی، فضای هیلبرت و مفاهیم وابسته به آن در نظر گرفته می‌شود [1].

در این مقاله سعی بر این است که بدون وارد شدن به تعاریف، اثبات‌ها و دقائق این مفاهیم ریاضیاتی، به توضیح ملاحظات معنایی در منطق کوانتومی بپردازیم و تنها از نتایج کار ریاضی‌دانان در این زمینه استفاده کنیم؛ هرچند در مواردی ورود به حیطه ریاضیّات برای بیان مقصود نگارنده اجتناب ناپذیر است. بنابراین ابتدا به توضیح ارتباط گزاره‌های تجربی، فضای هیلبرت و ادات ربط منطقی می‌پردازیم و پس از آن با ساختن شبکه متعامد غیرپخشی بر روی مجموعه زیرفضاهای بسته هیلبرت، تحقق جبری را معرفی خواهیم کرد. با تعریف تحقق جبری، معنا شناسی ادات ربط در منطق کوانتومی امکان پذیر خواهد شد.

---

۱- از جمله این چالش‌ها می‌توان به پارادوکس دو شکاف یا پارادوکس گربه شرودینگر اشاره کرد. برای بررسی بیشتر رک:

- Tonomura A. and Endo J. and Matsuda T. and Kawasaki T. and Exawa H. (1989), "Demonstration of single electron build up of an interference pattern", *Amer . J. Phys.* , Vol 57 , pp 117-120.
- Schrodinger E. (1935), "Discussion of Probability relations between separated systems" , *Proc. Cambridge. Phil. Soc.* Vol 31 , pp 555-563.

در ادامه با تعریف تحقق کریپکیایی، معنا شناسی ادات ربط منطق کوانتومی را با الهام از طرح کریپکی نیز بیان خواهیم کرد. در انتها با برقراری تناظری میان دو نوع معناشناسی بیان شده، ارتباط آنها را با جهان فیزیکی تشریح می‌کنیم.

## ۱. ارتباط فضای هیلبرت با پدیده‌های کوانتومی و ادات ربط

در طرح فون نویمن و بیرکهوف، مجموعه حالات[1] یک سیستم کوانتومی، یا به عبارت دیگر مجموعه همه توابع موج یک سیستم که فضای فاز[2] آن سیستم نیز نامیده می‌شود، معادل با یک فضای هیلبرت[3] در نظر گرفته می‌شود. یعنی هر تابع موج مانند $\psi$ که می‌تواند یک حالت از سیستم کوانتومی را نشان دهد، متناظر با یک بردار مانند $h$ از فضای هیلبرت $H$ است.

حال فرض می‌کنیم از $n$ سنجش که درباره سیستم $S$ انجام می‌دهیم، $n$ نتیجه $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ یا $n$ نتیجه $y_1$، $y_2$، ... و $y_n$ یا ... بتوانند به دست آیند. مجموعه همه $n$ تایی هایی که می‌توانند به عنوان نتایج این $n$ سنجش در نظر گرفته شوند، فضای مشاهده‌ای[4] سیستم، و هر زیر مجموعه از این فضای مشاهده‌ای، یک گزاره تجربی نامیده می‌شود. بنابراین و با توجه به تناظر فضای فاز سیستم با یک فضای هیلبرت، می‌توان هر گزاره تجربی را معادل با یک زیر فضای بسته[5] هیلبرت در نظر گرفت.

پس از روشن شدن ارتباط جهان فیزیکی با فضای هیلبرت، نوبت به معرفی مفاهیم منطقی و بیان ارتباط ادات ربط با این واسطه ریاضیاتی است.

### ۱-۱. ادات نقض

اگر $p$ یک گزاره تجربی باشد و $h_1$ زیر فضای هیلبرت متناظر آن در نظر گرفته شود، زیر فضای متناظر با نقیض گزاره $p$، زیرفضایی از فضای هیلبرت $H$ است که بردارهای عضو

1 . States
2 . phase space
3 . Hilbert space
4 . observation space
5 . closed subspace

آن بر تمامی اعضای $h_1$ عمودند[2]. این زیرفضا را اصطلاحاً مکمل متعامد[1] زیرفضـای $h_1$ می‌نامیم و آن را با $h_1^{\perp}$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$h_1^{\perp} = \{ x \in H; (\forall y \in h_1)\ x \perp y \}$$

پس، از آنجا که $h_1^{\perp}$ نیز یک زیرفضای بسته فضای هیلبرت H اسـت، مـی‌توانـد متنـاظر بـا یگ گزاره تجربی باشد که این گـزاره، همـان نقـیض گـزاره p، یعنـی $\neg p$ اسـت. بـه ایـن ترتیب صادق بودن گزاره p به این معناست که یکی از نتایج n تایی مانند $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ که در n سنجش مفروض رخ داده اسـت، در زیرمجموعـه p از فضـای مشـاهده‌ای موجـود است و این خود به این معناست که بردار متناظر با این حالت، در زیرفضـای $h_1$ قـرار دارد. همچنین صادق بودن گزاره $\neg p$ به این معناست که هیچکدام از نتـایجی کـه در n سـنجش مفروض رخ داده است در زیر مجموعه p از فضای مشاهده‌ای قرار ندارد و این خود به این معناست که بردار متناظر با نتیجه به دست آمده، نه تنها در زیرفضای $h_1$ وجود ندارد، بلکـه بر تمامی اعضای آن عمود است.

### ۱-۲. ادات عطف

در مباحث ریاضـی مربوطـه، بـه سـادگی ثابـت مـی‌شـود کـه اشـتراک دو زیرفضـای بسـته هیلبرت، خود یک زیرفضای بسته هیلبرت است[3]. بنابراین اگر اشـتراک ایـن دو زیرفضـا را با $h_3$ نمایش دهیم، $h_3$ نیز می‌تواند معادل با یک گزاره تجربی در نظر گرفتـه شـود. ایـن گزاره، ترکیب عطفی دو گزاره‌ای است که معادل با زیر فضاهای $h_1$ و $h_2$ هستند. پس اگـر p گزاره مربوط به $h_1$ و q گزاره مربوط به $h_2$ باشند، $p \wedge q$ گزاره متناظر با $h_3$ اسـت. بـه این ترتیب صـادق بـودن $p \wedge q$ بـه ایـن معناسـت کـه نتیجـه n سـنجش مفـروض، هـم در زیرمجموعه p از فضای مشاهده‌ای وجود دارد و هم در زیرمجموعـه q و ایـن خـود بـه آن معناست که بردار متناظر با این حالت هم عضـوی از زیرفضـای $h_1$ اسـت و هـم عضـوی از زیرفضای $h_2$.

[1] .ortho-complement

### ۱-۳. ادات فصل

متناسب با آنچه درباره ادات عطف بیان شد، ابتدا به نظر می‌رسد برای معرفی ادات فصل باید اجتماع دو زیرفضای بسته را مد نظر قرار دهیم. اما ممکن است اجتماع دو زیرفضای بسته هیلبرت، یک زیرفضای بسته نباشد [3]. یعنی دیگر نمی‌توان مطمئن بود که اجتماع دو زیرفضای بسته مانند $h_1$ و $h_2$، معادل با یک گزاره تجربی است. بنابراین برای معرفی ادات فصل، به جای اجتماع دو زیرفضا، از سوپریمم[1] آن‌ها استفاده می‌کنیم. سوپریمم دو زیرفضای بسته، کوچک‌ترین زیرفضای بسته‌ای است که شامل آن دو زیرفضا باشد و آن را با نماد $\sqcup$ نمایش می‌دهیم. پس اگر داشته باشیم $h_4 = h_1 \sqcup h_2$، $h_4$ زیرفضای بسته معادل با گزاره $p \vee q$ است.

این مطلب، هسته مرکزی تفاوت منطق‌های کوانتومی و کلاسیک را تشکیل می‌دهد. زیرا ثابت می‌شود که ممکن است برداری مانند $x$ از فضای هیلبرت $H$، عضو هیچ‌یک از زیرفضاهای $h_1$ و $h_2$ نباشد، اما عضوی از سوپریمم آن‌ها باشد. این خود به آن معناست که ممکن است هیچ‌یک از گزاره‌های $p$ و $q$ صادق نباشند اما ترکیب فصلی آن‌ها صادق باشد [4].

در صورتی که می‌دانیم در منطق کلاسیک با صادق نبودن دو گزاره، ترکیب فصلی آن‌ها نیز صادق نخواهد بود. به دلیل همین رفتار غیر کلاسیک ادات فصل در منطق کوانتومی، برخی از قواعد اساسی منطق کلاسیک، مانند قاعده پخشی نیز در منطق کوانتومی برقرار نیستند و این منطق در زمره منطق‌های غیر پخشی قرار می‌گیرد. بنابراین، خاصیّت اصلی منطق کوانتومی را می‌توان به صورت سطری از جدول ارزش ها در حالت زیر نمایش داد:

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| not T & not F | not T & not F | T |

[1] Supremum

باید دقت داشت که در جدول فوق، ارزش گزاره‌های p و q را کاذب در نظر نمی گیریم. بلکه آن را «نه صادق و نه کاذب» منظور می کنیم. دلیل این امر به مفهوم سرشتگی در حوزه کوانتوم مربوط می‌شود که در ادامه به این مسأله خواهیم پرداخت.

## ۲. سرشتگی (برهمنهی)[1] پدیده‌های کوانتومی

رایشنباخ در سال ۱۹۴۴ و پاتنم در سال ۱۹۵۷، در مقالات جداگانه‌ای طرح منطق سه ارزشی لوکاسیویچ را برای تبیین پدیده‌های کوانتومی پیشنهاد کردند. بنابر طرح پاتنم- رایشنباخ، گزاره‌های کوانتومی علاوه بر ارزش‌های «صادق» و «کاذب»، می توانند متصف به ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب» نیز باشند [5]. پس از انتشار این طرح، افرادی چون فایرابند و لوی[2] به انتقاد از آن پرداختند و بر این طرح اشکالاتی وارد کردند. از جمله اشکالات وارد شده به طرح پاتنم- رایشنباخ این است که در حالتی که ارزش یک گزاره برای ما مشخص نیست، ناچار آن را نامعلوم یا «نه صادق و نه کاذب» می‌دانیم. پس فرقی میان منطق دو ارزشی و سه ارزشی در این زمینه نیست و مطرح کردن ارزش سوم در اینجا امری زاید و بی‌فایده است [6]. به عبارت دیگر ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب» ، که پاتنم آن را ارزش صدق «میانه[3]» می‌نامد، فقط به جهت جهل معرفت شناسانه از امر واقع به میان کشیده می‌شود و چنین نیست که گزاره‌ای واقعاً دارای ارزش صدق میانه باشد. اما در جواب چنین انتقادی، پاتنم تاکید می کند که منظور او از ارزش صدق میانه، ارزش نامعلوم نیست. بلکه مقصود او از چنین ارزشی، دقیقاً چیزی است که یک گزاره را در عالم واقع و جدای از حیثیت معرفت شناختی، نه صادق و نه کاذب می‌داند.

در توضیح کلام پاتنم می‌توان از مفهوم برهمنهی یا سرشتگی در پدیده‌های کوانتومی استفاده کرد. به عنوان مثال، با استفاده از قضیه بل[4] مشخص می‌شود که در حالتی خاص، جهت اسپین الکترون در راستای یکی از محورهای مختصات (مانند محور y ها)، حالتی سرشته از بالا و پایین است [7].

[1] Superposition
[2] Levi
[3] Middle
[4] Bell

یعنی اگر فرض کنیم:

P : جهت اسپین الکترون در راستای محور y ها به سمت بالاست.

q : جهت اسپین الکترون در راستای محور y ها به سمت پایین است.

در این حالت نه می‌توان گزاره p را صادق دانست و نه گزاره q را. بلکه هرکدام از این گزاره‌ها ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب» را خواهند داشت و بنابراین تأکید پاتنم بر وجود ارزش صدق میانه، امری معقول به نظر می‌رسد. در حقیقت انگیزه فون نویمن و بیرکهوف در استفاده از فضای هیلبرتی به عنوان واسطه ریاضیاتی میان جهان کوانتومی و مفاهیم منطقی نیز تبیین همین خاصیت سرشتگی در پدیده‌های کوانتومی است. به عبارت دیگر آن‌ها باید واسطه‌ای ریاضیاتی را جستجو می‌کردند که بتواند در عین صادق نبودن دو گزاره p و q، ترکیب آن‌ها را صادق بداند تا بتواند حالت سرشتگی یا برهمنهی پدیده‌های کوانتومی را نمایش دهد و این مهم با استفاده از سوپریمم دو زیرفضای بسته هیلبرت محقق می‌شود. البته چنانکه لامبرت نشان داده است [8]، با استفاده از طرح فوق ارزشگزاری های[1] فن فراسن[2]، می‌توان منطق سه ارزشی پاتنم- رایشنباخ در حوزه کوانتوم را به منطقی دو ارزشی تبدیل کرد. اما این مطلب به معنای کنار گذاشتن یا انکار حالتی خاص که از سرشتگی دو حالت پدید می‌آید نیست. در واقع منطق کوانتومی که توسط فون نویمن و بیرکهوف بنیان‌گذاری شده است، منطقی دو ارزشی و بر اساس وجود حالت برهمنهی میان پدیده‌های کوانتومی است.

## ۳. تعبیر ادات ربط

آنچه در بالا مطرح شد، نوعی معناشناسی شهودی ادات ربط در منطق کوانتومی است که هرچند بنیان منطق کوانتومی بر آن استوار است، نمی‌توان آن را به عنوان یک معناشناسی منقّح و سیستماتیک در منطق کوانتومی پذیرفت. برای دستیابی به یک معناشناسی سیستماتیک در این حوزه، ابتدا لازم است مفهوم تحقق جبری معرفی شود.

[1]. super valuation
[2] .van Ferassen

## ۳-۱. تحقق جبری[1]

یک تحقق جبری ساختاری به صورت $A = \langle B, v\rangle$ است که در آن B یک شبکه متعامد و v یک تابع ارزش است که به هر فرمول از زبان سیستم، یک عضو از شبکه B را به عنوان «ارزش صدق» نسبت می‌دهد. یک شبکه متعامد ساختاری به صورت $B = \langle M, R, \perp, 1, 0\rangle$ است که در آن:

M ، مجموعه‌ای است که شبکه روی آن ساخته می‌شود.

R ، یک رابطه ترتیب جزئی است، یعنی خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدّی را داراست.

$\perp$ ، عملگر مکمل متعامد است.

0 ، عضو می‌نیمم شبکه و 1 ، عضو ماکزیمم شبکه است.

اگر به ازای هر دو عضو مانند a و b از مجموعه M، اینفیمم[2] را به صورت $a \sqcap b$ و سوپریمم را به صورت $a \sqcup b$ نمایش دهیم، رابطه R باید در شرایط زیر صدق کند:

1) $[(a \sqcap b)\ R\ a,b]\ \&\ (\forall c \in M)[(c\ R\ a,b) \rightarrow (c\ R\ (a \sqcap b))]$
2) $[a,b\ R\ (a \sqcup b)]\ \&\ (\forall c \in M)[\ (a,b\ R\ c) \rightarrow ((a \sqcup b)\ R\ c)]$
3) $(\forall a \in M\ (0\ R\ a\ \&\ a\ R\ 1)$

همچنین عملگر متعامد باید در شرایط زیر صدق کند:

1) $a^{\perp\perp} = a$
2) $a\ R\ b \rightarrow b^{\perp}\ R\ a^{\perp}$
3) $a \sqcap a^{\perp} = 0$

می‌توان نشان داد که در چنین شبکه‌ای خاصیت پخشی وجود ندارد و از این رو این شبکه‌ها را، شبکه‌های متعامد غیر پخشی نیز می‌گویند [2]. همچنین ثابت می‌شود که می‌توان چنین شبکه‌ای را روی مجموعه تمام زیرفضاهای بسته هیلبرت بنا کرد [2] . یعنی می‌توان به عنوان مثالی از شبکه‌های متعامد، ساختار زیر را معرفی کرد که در آن C(H) مجموعه تمام زیرفضاهای بسته هیلبرت است: $B = \langle C(H), R, \perp, 1, 0\rangle$ .

---

[1] .algebraic realization
[2] .infimum

از آنجا که هر زیرفضای بسته هیلبرت، معادل با یک گزاره تجربی در نظر گرفته می‌شود، می توان از خواص این شبکه برای تشکیل ساختار معنایی منطق کوانتومی دو ارزشی استفاده کرد. از این پس در این مقاله منظور از شبکه متعامد B، شبکه‌ای است که روی مجموعه $C(H)$ تعریف می‌شود.

### ۳-۲. صدق در منطق کوانتومی

با توجه به تعریف تحقق جبری، می‌توان درباره صدق و کذب یک گزاره سخن گفت[2]. به این نحو که اگر $\alpha$ فرمولی از زبان سیستم باشد، می‌گوییم $\alpha$ در تحقق A گزاره صادقی را بیان می‌کند اگر و تنها اگر تابع ارزش v به فرمول $\alpha$ عضو 1 شبکه را نسبت دهد. به عبارت دیگر داریم:

$\alpha$ گزاره صادقی را بیان می‌کند . $\quad \text{iff} \;\; v(\alpha) = 1$

اگر تابع ارزش v در هر تحقق مفروض، به فرمول $\alpha$ عضو 1 شبکه را نسبت دهد، می‌گوییم $\alpha$ گزاره‌ای را بیان می‌کند که «صادق منطقی» است و به تحقق خاصی مربوط نمی‌شود.

### ۳-۳. تعبیر ادات نقض

اگر $\alpha$ فرمولی از زبان سیستم منطقی مورد نظر باشد، با استفاده از مطالب فوق می‌توان تعبیر ادات نقض در منطق کوانتومی را به صورت زیر بیان کرد:

$$v(\neg\alpha) = v^{\perp}(\alpha).$$

بنابراین تابع ارزش v، به نقیض فرمولی مانند $\alpha$ از زبان سیستم، عضوی از شبکه B را نسبت می‌دهد که مکمل متعامد عضوی است که تابع ارزش v به خود $\alpha$ نسبت می‌دهد.

### ۳-۴. تعبیر ادات عطف

اگر $\alpha$ و $\beta$ دو فرمول از زبان سیستم منطقی مورد نظر باشند، تعبیر ادات عطف به صورت زیر است:

$$v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \sqcap v(\beta).$$

به دیگر سخن، تـابع ارزش v بـه ترکیـب عطفـی دو فرمـول، عضـوی از شـبکه B را نسبت می‌دهد که متناظر با اینفیمم اعضایی است که تـابع v بـه صـورت جداگانـه بـه فرمـول‌هـای مورد نظر نسبت می‌دهد. بنابراین زمانی ترکیب عطفی دو فرمول $\alpha$ و $\beta$ گزاره‌ای صـادق را بیان می‌کند که عضو 1 شبکه متعلق به اینفیمم $v(\alpha)$ و $v(\beta)$ باشد.

## ۳-۵. تعبیر ادات فصل

در قسمت ۱-۳ بیان شد که رفتار ادات فصل در منطق کوانتومی، رفتاری غیـر عـادی اسـت. بنابراین نمی‌توان به صورت مستقیم و با استفاده از خواص شبکه متعامد، تعبیر ادات فصل را بیان کرد. به همین جهت این رابط منطقی در ساختار نحوی منطق کوانتومی به عنـوان یکـی از ادات منطقی مستقل مطرح نمی‌شود، بلکـه در زبـان ایـن سیسـتم منطقـی، ادات فصـل بـر حسب ادات نقض و عطـف تعریـف شـده اسـت. البتـه شـایان ذکـر اسـت کـه در برخـی از تقریرات ساختار نحوی منطق کوانتومی، ادات فصـل نیـز جـزء ادات اصـلی در نظـر گرفتـه می‌شود. اما رویکرد غالب، تعریف این رابط به عنوان یک رابط فرعی در زبان سیستم است که به صورت زیر بیان می‌شود[9]:

$$\alpha\vee\beta \ =\mathrm{df}\ \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta).$$

بنابراین می‌توان تعبیر ادات فصل را به صورت زیر بیان داشت:

$$v(\alpha\vee\beta) = v^{\perp}(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = v^{\perp}(\ v^{\perp}(\alpha) \sqcap v^{\perp}(\beta)).$$

در این مورد باید دقت داشت که هرچند ظاهر تعریف ارائه شده برای ترکیب فصلی، مشابه حالت کلاسیک قاعده دمورگان است، نمی‌توان آن را به عنوان یک عملگـر کلاسـیک در نظر گرفت. زیرا تعابیر عطف و نقض در این سیسـتم منطقـی بـا حالـت کلاسـیک متفـاوت است و در حقیقت تعبیر ادات فصل نیز در شبکه متعامد غیر پخشی B صورت می‌گیـرد. بـه عبارت دیگر با این تعبیر مـی‌تـوان حـالتی را بیـان داشـت کـه در آن $v(\alpha)\neq1$ و $v(\beta)\neq1$، یعنی هیچ یک از فرمول‌های $\alpha$ و $\beta$ گزاره‌های صادقی را بیـان نکننـد، امـا $v(\alpha\vee\beta) = 1$، که این دقیقاً همان چیـزی اسـت کـه در منطـق کوانتـومی بـرای تبیـین خاصـیت برهمنهـی

پدیده‌های کوانتومی مورد نیاز است. برای توضیح این مطلب یادآوری می‌شود زمانی که $v(\alpha)\neq 1$ باشد، لزوماً $v^{\perp}(\alpha)=1$ نخواهد بود (همچنین است درباره $v(\beta)$). پس $v^{\perp}(\alpha) \sqcap v^{\perp}(\beta)$ نیز لزوماً متناظر با عضو 1 شبکه نخواهد بود و بنابراین مکمل متعامد آن لزوماً 0 نیست و می‌تواند متناظر با عضو 1 شبکه باشد.

### ۳-۶. تعبیر ادات استلزام

در منطق کوانتومی، معناشناسی ادات شرط یا به تعبیر دیگر استلزام مادی، با پیچیدگی‌هایی روبروست. بنابر آنچه دالاچیارا نشان داده است[2]، شرط کافی برای آنکه $\rightarrow$ در یک تحقق جبری مانند A، ادات استلزام باشد آن است که:

$\alpha\rightarrow\beta$ در تحقق A صادق باشد اگر و تنها اگر $v(\alpha)\ R\ v(\beta)$.

اما پیچیدگی ادات استلزام در منطق کوانتومی از آنجا ناشی می‌شود که دیگر نمی‌توان مانند منطق کلاسیک، آن را با استفاده از قاعده فیلو تعریف کرد. قاعده فیلو بیان می‌کند:
$\alpha\rightarrow\beta =df \neg\alpha \vee \beta$ .

اما در منطق کوانتومی ممکن است $\neg\alpha \vee \beta$ گزاره صادقی را معرفی کند ( $v(\neg\alpha \vee \beta) = 1$) درحالی که رابطه $v(\alpha)\ R\ v(\beta)$ برقرار نباشد. بنابراین شرط کافی فوق خدشه دار خواهد بود و ادات استلزام در سیستم منطقی مورد بحث به صورت عادی تعبیر نمی‌شود.
کالمباخ، پنج تعبیر متفاوت از استلزام مادی ارائه داده است [10] که امروزه فقط یکی از آن‌ها (تعبیر اول کالمباخ) به عنوان تعبیر ادات استلزام در منطق کوانتومی شناخته می‌شود. این تعبیر به صورت زیر است:

$$v(\alpha\rightarrow\beta) = v^{\perp}(\alpha) \sqcup [v(\alpha) \sqcap v(\beta)].$$

البته هاردگری این تعبیر را پیش از کالمباخ بیان کرده و نشان داده است که این تعبیر با خواص پدیده‌های کوانتومی سازگاری دارد [11]. منطق کوانتومی که با این نوع از ادات استلزام ساخته می‌شود، بسیاری از قواعد و قضایای منطق کلاسیک را نقض خواهد کرد.

هاردگری در مقاله دیگری فهرست قواعد و قضایای نقض شده در منطق کلاسیک توسط این تعبیر از ادات استلزام را بیان کرده است[12].

## ٤. معناشناسی کریپکیایی ادات ربط

می توان با الهام از طرحی که کریپکی برای معناشناسی منطق موجهات کلاسیک ابداع کرده است، ساختار معنایی دیگری (علاوه بر تقریر جبری) برای منطق کوانتومی تشکیل داد. بیان کریپکیایی معناشناسی منطق کوانتومی، نخستین بار توسط دیشکانت طراحی شد [13] که برای بحث درباره آن، ابتدا لازم است مفاهیم جدیدی را معرفی کنیم.

### ٤-١. معرفی برخی مفاهیم مورد نیاز

#### ٤-١-١. چارچوب متعامد[1]

یک چارچوب متعامد ساختاری مانند $F = \langle I, R\rangle$ است که در آن I مجموعه ناتهی جهان‌ها و R رابطه دسترس پذیری دو موضعی است که روی I خاصیت بازتابی و تقارنی دارد. زمانی که جهان $W_i$ با جهان $W_j$ رابطه داشته باشد، می‌نویسیم: $W_i\, R\, W_j$ .

#### ٤-١-٢. مکمل متعامد

در چارچوب متعامد F، برای هر مجموعه از جهان‌ها مانند W که $W \subseteq I$ ، مکمل متعامد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^{\perp} = \{ W_i \,;\, (\forall\, W_j)[W_j \in W \rightarrow \text{not}\ (W_j\, R\, W_i)]\}.$$

به عبارت دیگر $W^{\perp}$ مجموعه همه جهان‌هایی مانند $W_i$ است که هیچ عضوی از مجموعه W به هیچ عضوی از این مجموعه دسترسی ندارد.

[1] .orthoframe

### ٤-۱-۳. گزاره[1]

مجموعه W از جهان‌ها، یک گزاره از چارچوب F نامیده می‌شود اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کند:

$$(\forall W_i)\ [W_i \in W \text{ iff } (\forall W_j)\ (W_i R W_j \rightarrow W_j R W)].$$

به عبارت دیگر یک گزاره، مجموعه‌ای مانند W از جهان‌هاست که شامل تمام جهان‌هایی باشد که جهان‌های در دسترس آنها به W دسترسی داشته باشند و در ضمن جهان W فقط باید شامل چنین جهان‌هایی باشد.

### ٤-۱-٤. تحقق کریپکیایی[2]

یک تحقق کریپکیایی، ساختاری به صورت $K = \langle F, \pi, \rho \rangle$ است که در آن F یک چارچوب متعامد، $\pi$ مجموعه‌ای از گزاره‌های چارچوب است که شامل I و $\varnothing$ است و $\rho$ یک تابع ارزش است که به هر فرمول از زبان سیستم، یک گزاره از $\pi$ را نسبت می‌دهد. بنابراین عبارت $W_i \in \rho(\alpha)$، به معنای آن است که فرمول $\alpha$ در جهان $W_i$ گزاره صادقی را بیان می‌کند.

### ٤-۲. تعبیر ادات ربط

با استفاده از مفهوم تحقق کریپکیایی می‌توان ادات ربط منطقی را به صورت زیر تعبیر کرد:

### ٤-۲-۱. تعبیر ادات نقض

اگر $\alpha$ فرمولی از زبان سیستم باشد، ادات نقض کوانتومی در تحقق کریپکیایی K به این صورت تعبیر می‌شود: $\rho(\neg\alpha) = \rho^{\perp}(\alpha)$. به عبارت دیگر، تابع ارزش $\rho$ به نقیض $\alpha$، گزاره‌ای از $\pi$ را نسبت می‌دهد که مکمل متعامد گزاره متناظر با $\alpha$ است. همچنین با

[1] Proposition
[2] Kripkean realization

استفاده از این تعبیر می‌توان گفت $\neg\alpha$ در جهان $W_i$ گزاره صادقی را بیان مـی‌کنـد اگـر و تنها اگر $\alpha$ در هیچ یک از جهان‌هایی که به $W_i$ دسترسی دارند گزاره صادقی را بیان نکند.

### ٤-۲-۲. تعبیر ادات عطف

اگر $\alpha$ و $\beta$ دو فرمول از زبان سیستم باشند، ادات عطف کوانتومی در تحقـق کریپکیـایی K به این صورت تعبیر می‌شود: $\rho(\alpha\wedge\beta) = \rho(\alpha) \cap \rho(\beta)$ . به عبارت دیگـر تـابع ارزش $\rho$ به ترکیب عطفی $\alpha$ و $\beta$ گزاره‌ای را نسبت می‌دهد که به اشتراک گزاره‌های متنـاظر بـه هـر یک آنها به صورت جداگانه نسبت می‌دهد. همچنین با استفاده از این تعبیر مـی‌تـوان گفـت $\alpha\wedge\beta$ در جهان $W_i$ گزاره صادقی را بیان می‌کند اگر و تنها اگـر هـم $\alpha$ و هـم $\beta$ در جهـان $W_i$ گزاره‌های صادقی را بیان کنند.

### ٤-۲-۳. تعبیر ادات فصل

مشـابه آنچـه در قسـمت ۳-۵ بیـان شـد، معناشناسـی ادات فصـل در تقریـر کریپکیـایی نیـز نمی‌تواند به صورت مستقیم و مستقل از ادات نقض و عطف بیان شود. بـا توجـه بـه تعریـف ادات فصل در ساختار نحوی سیستم، تعبیر ادات فصل در تحقـق کریپکیـایی K بـه صـورت زیر است:

$$\rho(\alpha\vee\beta) = \rho^{\perp}(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = \rho^{\perp}( \rho^{\perp}(\alpha)\cap \rho^{\perp}(\beta)).$$

همچنین توضیحاتی که درباره ادات استلزام در یک تحقـق جبـری بیـان شـد، دربـاره یـک تحقق کریپکیـایی نیـز صـادق اسـت. بنـابراین آنچـه بـه عنـوان تعبیـر ادات اسـتلزام شـناخته می‌شود، همان تعبیر اول کالمباخ است که برحسب تابع ارزش $\rho$ و گزاره‌های متناظر بـا هـر فرمول بیان می‌شود.

## ۵. ارتباط معناشناسی‌های جبری و کریپکیایی

می‌توان ثابت کرد که معناشناسی‌های جبری و کریپکیایی منطق کوانتومی، معادل هم هستند. در ادامه دو مورد از قضایایی را که چگونگی ارتباط این دو نوع معناشناسی را مشخص می‌کنند، بدون اثبات آن‌ها ارائه می‌دهیم [2].

- $\alpha$ در یک تحقق جبری مانند A، صادق منطقی است اگر و تنها اگر در یک تحقق کریپکیایی مانند K صادق منطقی باشد. به عبارت دیگر به ازای هر تحقق جبری مانند A، یک تحقق کریپکیایی مانند K چنان وجود دارد که اگر $\alpha$ در A صادق منطقی باشد، در K نیز صادق منطقی است و بالعکس.
- $\alpha$ در یک تحقق جبری مانند A، یک نتیجه منطقی از مجموعه‌ای از فرمول‌ها مانند T است، اگر و تنها اگر در یک تحقق کریپکیایی مانند K یک نتیجه منطقی از مجموعه T باشد. به عبارت دیگر به ازای هر تحقق جبری مانند A، یک تحقق کریپکیایی مانند K چنان وجود دارد که اگر $\alpha$ در A نتیجه منطقی مجموعه‌ای از فرمولها مانند T باشد، در K نیز نتیجه منطقی T است و بالعکس.

بر این اساس، می‌توان ارتباطی میان معناشناسی جبری، معناشناسی کریپکیایی و جهان فیزیکی برقرار کرد تا تعابیر فیزیکی این معناشناسی‌ها واضح‌تر و ملموس‌تر ارائه شود.

## ٦. تعابیر فیزیکی در معناشناسی کریپکیایی

چنانکه در قسمت ۱ بیان شد، می‌توان تمامی حالات یک سیستم کوانتومی، یعنی کلیه توابع موجی را که می‌توانند معرف یک سیستم کوانتومی باشند، به عنوان یک فضای هیلبرت در نظر گرفت. در تحقق کریپکیایی، این فضای هیلبرت در تناظر با مجموعه I قرار می‌گیرد. به دیگر سخن هر جهان ممکن در این تقریر، یک تابع موج، و مجموعه همه جهان‌های ممکن، همان فضای فاز سیستم یا فضای هیلبرت متناظر با آن است. بنابراین زمانی که می‌گوییم $\alpha$ در جهان $W_i$ گزاره صادقی را بیان می‌کند ($W_i \in \rho(\alpha)$)، به معنای این است که فرمول $\alpha$ نمایش دهنده حالتی متناظر با تابع موج i است. به عبارت

دیگر $\alpha$ گزاره‌ای را بیان می‌کند که مشخصات تابع موج i در آن صدق می‌کند و ارزش احتمالاتی رخ دادن $\alpha$ برابر ۱ است.

به همین ترتیب رابطه دسترس‌پذیری R که میان دو جهان مفروض مانند $W_i$ و $W_j$ تعریف می‌شود، به معنای این است که تابع موج i قادر به تبدیل شدن به تابع موج j در سیستم S است و چون این رابطه خاصیت تقارنی دارد، تابع j نیز می‌تواند به تابع i تبدیل شود. این قبیل تبدیلات در تابع موج، ممکن است با تغییر در دما، انرژی یا مانند آنها رخ دهد. اما اگر تابع موج i، تحت هیچ شرایطی نتواند به j تبدیل شود، جهان $W_i$ به $W_j$ دسترسی نخواهد داشت. مطابق همین تعبیر فیزیکی از رابطه دسترس پذیری است که برای این رابطه خواص بازتابی و تقارنی الزامی هستند اما خاصیت تعدی برای آن الزامی نیست. اگر $W_i$ به $W_j$ و $W_j$ به $W_k$ دسترسی داشته باشند، لزوماً $W_i$ به $W_k$ دسترسی ندارد، زیرا ممکن است تابع i بتواند به تابع j، و تابع j نیز بتواند به تابع k تبدیل شود، اما تابع i نتواند مستقیماً به تابع k تبدیل شود. از طرفی خاصیت بازتابی، یعنی دسترسی یک جهان به خودش، به این معناست که تابع موج مربوطه حالت مشخصی از سیستم را نمایش می‌دهد و تحت شرایط ثابت، این تابع نیز ثابت است یا به عبارت دیگر به خودش تبدیل می‌شود. همچنین مفهوم رابطه دسترس‌پذیری در ارتباط با فضای هیلبرتی، به این معنا خواهد بود که بردار متناظر با تابع موج i، می‌تواند به بردار متاظر با تابع j تبدیل شود که این عمل توسط ماتریس‌های تبدیل و عملگرهای مربوطه انجام می‌شود.

با توجه به این موارد، مکمل متعامد، تعبیر فیزیکی مشخصی پیدا خواهد کرد. اگر W و $W^{\perp}$ دو زیرمجموعه از کل توابع موج مربوط به یک سیستم باشند، $W^{\perp}$ مکمل متعامد W است زمانی که هیچ یک از توابعی که در مجموعه W وجود دارند، با هر نوع تغییر در شرایط فیزیکی، نتوانند به هیچ یک از توابع موجی که در $W^{\perp}$ وجود دارند تبدیل شوند. به این طریق تعبیر فیزیکی معناشناسی ادات نقض در تقریر کریپکیایی مشخص می‌شود و به همین روش می‌توان تعبیر فیزیکی دیگر ادات ربط را نیز در این تقریر، تشریح کرد.

## ۷. نتیجه‌گیری

تعبیر ادات ربط در منطق کوانتومی، بر مبنای دو تقریر جبری و کریپکیایی انجام می‌شود. در تقریر جبری، با تشکیل یک شبکه متعامد برروی مجموعه همه زیرفضاهای بسته هیلبرت، می‌توان ادات ربط را تعبیر کرد. در این حالت، ساختاری به نام تحقق جبری که متشکل از یک شبکه متعامد و یک تابع ارزش است برای تعبیر ادات ربط به کار گرفته می‌شود که تابع ارزش آن به نقیض یک گزاره، مکمل متعامد آن، و به ترکیب عطفی دو گزاره، اینفیمم توابع متناظر با آنها را نسبت می‌دهد. در تقریر کریپکیایی نیز با تشکیل ساختار تحقق کریپکیایی، نقیض یک گزاره، مکمل متعامد آن، و ترکیب عطفی دو گزاره، اشتراک توابع نظیر آن دو گزاره معرفی، و سایر ادات ربط برحسب ادات نقض و عطف تعبیر می‌شوند. هرچند این دو تقریر به صورت یک تکنیک در معناشناسی ادات ربط منطق کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرند، دارای تعابیر فیزیکی و متناسب با عالم خارج نیز هستند. مبداء این تعابیر فیزیکی، در نظر گرفتن مجموعه همه حالات یا توابع موج سیستم، به عنوان فضای هیلبرت (در تحقق جبری) و مجموعه همه جهان‌های ممکن (در تحقق کریپکیایی) است. معادل دانستن هر تابع موج از یک سیستم با یک بردار در فضای هیلبرت یا یک جهان ممکن، راه را برای تعبیر ادات ربط منطق کوانتومی هموار می‌کند.

## ۸. منابع

[1] Birkhoff G. and von Neumann J. "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mechanics*, No 37, 1936, PP 823, 843.

[2] Dalla Chiara L. and Giuntini R. , "Quantum Logic", in *Hand Book of Philosophical Logic*, Vol 6, by D.M. Gabbay and F.Guenthner (ed), Kluwer Acadmic Publishers, 2000.

[3] Engesser K. and Gabbay D.M. and Lehmann D. , *A New Approach to Quantum Logic*, College Publications, 2000.

[4] Aerts D. and Hondt E.D. and Gabora L. ,"Why the Logical Disjunction in Quantum Logic is Not Classical", *Foundations of physics*, vol 30, No 9, 2000, pp 1473-1480.

[5] Putnam H. , "Three- Valued Logic", *Philosophical studies* , No 3 , 1957, pp 73-80.

[6] Feyerabend P. , "Reichenbach's Interpretation of Quantum Mechanics", *Philosophical Studies*, No 4 , 1958, pp 49-59.

[7] Greenstein G. and Zajonc A. , *The Quantum challenges*, Jones and Bartlett publishers, 1997.

[8] Lambert K. , "Logical Truth and Microphysics ", in *Free Logic (Selected Essays)*, Cambridge University Press, 2004

[9] Nishimura H. , "Proof Theory for Minimal Quantum Logic . I ", *International Joural of Theoretical Physics*, vol. 33, 1994, PP 103-113.

[10] Kalmbach G. , *Orthomodular Lattice* , New York, Academic Press, 1983.

[11] Hardegree G. M. , "Stalnaker Conditionals and Quantum Logic", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 29 , No 4, 1975, pp 399-42.

[12] Hardegree G. M. , "The conditional Quantum Logic" , in *Logic and Probability in Quntum Mechanics*, by P. Suppes (ed), Dordrecht: Reidel , 1976, pp 55-72.

[13] Dishkant H. , "Semantics of the Minimal Logic of Quantum Mechanics" , *Studia Logica*, vol 30 , 1972, pp17-29.