مجلهٔ فیزیک کاربردی دانشگاه الزهرا(س)
سال هفتم، پیاپی ۱۳، پاییز و زمستان ۱۳۹۶

میدان‌های اسکالر مقید به سطح کره[1]

ابوالفضل جعفری[2]

تاریخ ارسال: ۱۳۹۵/۱۱/۱۰
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۰۶
تاریخ تصویب: ۱۳۹۷/۰۷/۱۱

چکیده

مطالعهٔ نظریهٔ میدان‌های اسکالر مقید به رویه‌ها، یکی از زمینه‌های مهم تحقیقاتی در حوزهٔ فیزیک نظری است. در این مقاله، مسیر متفاوتی برای مطالعهٔ نظریهٔ میدان‌های مقید به رویه‌ها ارائه می‌شود که نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از به کاربردن روش عمومی و مستقیم برای این نظریه‌ها قابل مقایسه خواهد بود. نشان خواهیم داد که نظریهٔ میدان‌های مقید به رویه‌ها، معادل نظریهٔ میدان‌های برهمکنشی با امواج گرانشی ضعیف در فضا زمان تخت مینکوفسکی است. اساس روشی که استفاده می‌شود، بر پایهٔ نگاشت استریوگرافیک و روش هیگز استوار است. با استناد به روش هیگز، متریک صفحهٔ نگاشت استریوگرافیک را تعیین نموده و نظریهٔ میدان‌های هم‌ارز روی سطح کره را در صفحهٔ نگاشت پیدا می‌کنیم. سطح داخلی و خارجی کره با انحناهای متفاوت به عنوان دو رویهٔ متفاوت در نظر می‌گیریم و خواهیم دید که نتایج برای رویه‌ها با انحنای مثبت و منفی متفاوت خواهد بود. در این مقاله، تأثیرات میدان گرانشی ضعیف در

[1] شناسه دیجیتال (DOI): 10.22051/jap.2018.13823.1067

[2] دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد؛ jafari-ab@sku.ac.ir

میدان‌های اسکالر برهمکنش‌کننده با امواج گرانشی تا مرتبهٔ اول از تانسور ریمان به عنوان پارامتر بسط در نظر گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نظریه میدان‌های اسکالر، امواج گرانشی، مختصات ریمانی، نگاشت ژنومی، روش هیگز.

۱. مقدمه

بازنویسی فیزیک و نظریه‌های مرتبط با آن بر روی خمینه‌هایی به غیر از فضا زمان مینکوفسکی، امروزه یکی از هسته‌های فکری فیزیکدانان شده است. گسترش خمینه‌های مورد مطالعه، بسیار فراتر از امکانات دستیابی به آنها است. نظریهٔ ریسمان و هندسهٔ ناجابه‌جایی نمونه‌هایی به‌روز هستند. مطالعهٔ نظریه‌های کوانتومی بر روی خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر مانند سطح کره یا بیضی یا هذلولی گون نیز یکی دیگر از جنبه‌های این قضیه است. امروزه کار در این زمینه از این فراتر بوده و خمینه‌ها در ابعاد مختلف و با قواعد پیچیده‌تری مطالعه می‌شود. خمینه‌هایی با مختصات محلی جابه‌جاناپذیر و خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر نمونه‌های قابل ذکر هستند.

مطالعهٔ مشترک در حوزهٔ الکترومغناطیس، با بازنویسی معادلات ماکسول بر روی رویه‌هایی مانند کره، بیضی‌گون و هذلولی‌گون نتایج جالبی به دست آورده است. از جمله نتایج این مطالعات هم‌ارزی تأثیر خمیدگی رویه بر معادلات ماکسول بدون محیط مادی با تأثیر حضور محیط‌های دی‌الکتریک در فضا زمان مینکوفسکی است [۱]. دست‌آورد مهم مقیدسازی معادلات ماکسول به سطح کره این نتیجه است: خمیدگی ساختار هندسی به تنهایی معادل برهمکنش میدان‌های الکترومغناطیسی با محیط‌های مادی مانند دی‌الکتریک است. به هرحال امروزه، مطالعه نظریه میدان‌های کوانتومی بر روی خمینه‌های نه چندان مرتبط، یکی از زمینه های پژوهشی در فیزیک انرژیهای بالا و ذرات بنیادی شده است. از این دست می‌توان به حل معادله دیراک یا معادله مایورانا در حالت جامد و در بررسی ابر رساناهای توپولوژیک اشاره کرد. هرچند در اعتبار محل به کار بردن این معادلات همواره اشکال هموردایی وجود دارد ولی نمی‌توان نتایج آن‌ها را در تحلیل رفتار این سامانه‌ها نادیده گرفت. این مطالعات نشان از اثر شگفت‌انگیز خمش رویه‌ها بر تغییر دینامیک کمیت‌های فیزیک مانند انتشارگر در نظریهٔ کوانتمی میدان‌ها و رسانش الکتریکی است. یکی از بارزترین این مطالعات بررسی رسانش در گرافین است [۲]. مطالعهٔ فیزیک ذرات بنیادی در حالت جامد، در ابتدا می‌تواند با مطالعهٔ نظریهٔ کوانتمی میدان‌های اسکالر به عنوان طرح مسئله برای ورود به مطالعهٔ کاربردی‌تر معالات دیراک باشد. بی‌شک، در آیندهٔ نه چندان دور بسیاری از

حوزه‌های فیزیک ذرات بنیادی در زمینهٔ ساختارهای دسترس‌پذیر در طبیعت مطالعه خواهد شد و مسئله از مطالعهٔ نظریهٔ میدان‌های اسکالر فراتر رفته و به بازنویسی معالات دیراک و ماریونا در مسائلی از حالت جامد، تعریف‌شده روی رویه‌هایی از مواد خواهد رسید. یکی از افق‌های دسترس‌پذیر برای مطالعه در این زمینه، شبیه‌سازی محیط‌های مادی با مقیدسازی میدان‌ها در فیزیک است. نتایج مطالعهٔ معادلات ماکسول بدون چشمه ـ همانند نظریهٔ الکترودینامیک ـ بر روی کره یا هر شکل هندسی تعریف‌شدهٔ دیگر که به یک نظریهٔ معادل برهمکنشی ـ همانند الکترومغناطیس با دی‌الکتریک ـ با ماده می‌انجامد، مهم‌ترین انگیزهٔ نویسنده برای این کار می‌باشد. انتظار داریم در بازنویسی نظریهٔ میدان‌های اسکالر بر روی سطح کره، اثر خمش هندسی فضا به صورت یک جملهٔ اضافی در نقش محیط برهمکنش‌کننده، ظاهر شود. با بازنویسی نظریهٔ میدان‌های اسکالر در حضور میدان گرانشی ضعیف، نشان خواهیم داد که میدان اسکالر بر روی سطح کره معادل میدان برهمکنشی با امواج گرانشی است. برای این منظور ابتدا، به مطالعهٔ میدان در پس‌زمینهٔ گرانشی می‌پردازیم.

۲. میدان اسکالر در حضور میدان گرانشی ضعیف

بر اساس یکی از اصول نسبیت عام در یک ناحیه با متریک شبه ریمانی همواره امکان انتخاب یک دستگاه لخت در یک منطقهٔ فضازمانی وجود دارد که فضای مماس بر خمینهٔ ریمانی همان دستگاه لخت خواهد بود. در این حالت جمله‌های متریک و ضرایب کریستوفل در فضای مماس بر اساس پارامتر خمش فضا یعنی مؤلفه‌های تانسور ریمان بسط داده می‌شوند و دستِ‌کم تا مرتبهٔ اول، متریک این فضای بناشده، متریک مینکوفسکی خواهد بود و چهارچوب مختصات توصیف‌کنندهٔ فضای مماس، مختصات ریمانی خواهد بود [۳، ۴].

حضور میدان گرانشی و برهمکنش اجسام فیزیکی با آن در سطح مکانیک کوانتوم به طور سیستماتیک مشخص نیست و دو روش برای بررسی آن وجود دارد. نخست، روش دویت[1] که در آن سعی می‌شود مکانیک کوانتومی در یک فضازمان خمیده با زمینهٔ گرانشی باز نویسی شود و دوم، روش وبر[2] که در آن پاسخ معادلات دینامیک ذرات به حضور امواج گرانشی به صورت یک پاسخ کلاسیکی فرض می‌شود. البته این دو روش هم‌ارز نیستند و نمی‌توان نتایج حاصل از به کار بردن روش اول یا روش دوم را از روش دیگر به دست آورد [۵، ۶].

---

[1] DeWitt
[2] Weber

در بسیاری از مراجع فیزیک، معادلهٔ دیراک را در فضازمان خمیده بازنویسی کرده و انحراف آن را از فضازمان مینکوفسکی به صورت اختلالی بررسی می‌کنند. در حد غیرنسبیتی، این مسئله به معادلهٔ مستقل از زمان شرودینگر با حضور یک پتانسیل مؤثر در معادلهٔ ژئودزیک ناشی از برهمکنش ذره با میدان گرانشی منتهی می‌شود. اعمال این روش برای نظریهٔ میدان‌های کوانتومی منتهی به حضور جملهٔ میرایی در معادله حرکت میدان‌ها خواهد شد. در حقیقت این جمله جفت شدگی هندسهٔ فضا و میدان‌های کوانتومی خواهد بود [۷، ۸].

در کل، امواج گرانشی از ناحیه‌ای در فضا با چشمه‌هایی مانند ستاره‌های نوترونی و غیره گسیل می‌شوند و انتشار امواج گرانشی در خلأ برای فضازمان با ابعاد کمتر از چهار امکان‌پذیر نخواهد بود. بر اساس نظریهٔ نسبیت عام، امواج گرانشی از دستهٔ میدان‌های پیمانه‌ای هستند و درجهٔ آزادی آنها با در نظر گرفتن آزادی پیمانه‌ای مانند میدان‌های الکترومغناطیسی کمتر خواهد شد [۹]. در حالت حدی، برای میدان گرانشی ضعیف و برای نقاطی در فضا به دور از چشمه، این پدیده را به صورت جملهٔ اختلالی در متریک وارد می‌کنیم. به این ترتیب

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h_{ab}(\xi,t)dx^a dx^b, \qquad (۱)$$

که در آن اندیس‌های یونانی از صفر تا ۳ و اندیس‌های لاتین فقط شامل ۱و ۲ هستند و $h_{ab}(\xi,t)$ اختلال ناشی از حضور میدان گرانشی ضعیف و ξ راستای انتشار است. راستای انتشار عموما در جهت z خواهد بود. همچنین $\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)$ متریک مینکوفسکی است. به جهت پیمانه‌ای بودن میدان گرانشی، این امواج در قالبِ دو قطبش متفاوت توصیف می‌شوند. قطبش $+$: $h_{11} = -h_{22} = h,\ \ h_{ij} = 0;\ i = j \neq 1,2$ و قطبش $\times$: $h_{12} = h_{21} = h,\ \ h_{ij} = 0;\ i,j \neq 1,2$. برای این انتخاب از امواج گرانشی، تنها مؤلفه‌های غیر صفر ضرایب کریستوفل و تانسور ریمان به سادگی قابل محاسبه و ارائه هستند

$$R^0_{120} = \frac{1}{2}\ddot{h}, \qquad (۲)$$

که در آن h دامنه وابسته به زمان امواج گرانشی است [۹، ۱۰]. با توجه به روابط بسط و برای امواج گرانشی، بیشتر مؤلفه‌های ضرایب کریستوفل صفر هستند و Γ^0_{i0} مؤلفه‌های غیر صفر آن در قطبش $+$ هستند. همچنین تخت بودن فضازمانِ بناشده بر پایهٔ متریک (۱) را به سادگی و با محاسبهٔ تانسورهای خمش ریمان می‌توان تحقیق کرد. می‌دانیم که در یک متریک عمومی، میدان‌های اسکالر در معادلهٔ حرکت زیر صدق می‌کنند [۷]

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + m^2\sqrt{-g}\,\phi = 0, \qquad (۳)$$

که در آن g دترمینان متریک و m جرم میدان است. اگر به ناحیه‌ی از فضا که در شرایط تحقق مختصات ریمانی صدق می‌کند بسنده کنیم، معادلهٔ حرکت میدان‌های اسکالر به صورت زیر خواهد بود

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma^\nu_{i\nu} \partial^i \phi + m^2 \phi = 0, \tag{۴}$$

برای متریک مختل‌شده با امواج گرانشی و با توجه به روابط بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \Gamma^0_{0i} \partial^i \phi + m^2 \phi = 0, \tag{۵}$$

دیده می‌شود که نوعی جفت‌شدگی بین مشتقات فضایی میدان و مختصات ریمانی فضای مماس در معادلهٔ حرکت میدان برقرار می‌شود. این جفت‌شدگی می‌تواند باعث میرایی یا برانگیختگی میدان‌ها و غیر خطی شدن نظریه شود. به این ترتیب می‌توان اثرات نگاشت از فضازمان عمومی را به فضای مماس به صورت ظهور یک جملهٔ برهمکنشی اختلالی در معادلهٔ حرکت نشان داد و این تمام اثرات خمش فضازمان در آن نقطهٔ مورد نظر بر رفتار میدان‌های اسکالر است [۱۱]. می‌توان معادلهٔ حرکت (۵) را به صورت زیر نیز بازنویسی کرد

$$(\partial_\mu + \frac{1}{2}\Gamma_\mu)(\partial^\mu + \frac{1}{2}\Gamma^\mu)\phi + m^2\phi = 0, \tag{۶}$$

در این صورت، جملهٔ برهمکنشی در حالت جفت‌شدگی با تکانه و به صورت جفت‌شدگیِ کمین (Minimal Coupling) دیده می‌شود. در رابطهٔ (۶) $\Gamma_\mu = \Gamma^0_{0\mu}$, است به طوری که $\Gamma_0 = 0$ و همچنین $\partial_\mu(\Gamma^\mu \phi) + \Gamma_\mu \partial^\mu \phi = 2\Gamma^0_{0i}\partial^i \phi,$ است. برای استخراج رابطهٔ (۶) از توان‌های بالاتر ضرایب کریستوفل ($\Gamma_\mu \Gamma^\mu$) صرف نظر کرده‌ایم.

بازنویسی متعارف نظریهٔ میدان‌ها بر روی خمینه‌هایی مانند سطح کره در سال‌های دور انجام شده است [۸، ۱۱] اما، بازنویسی نظریهٔ میدان‌ها به روش هیگز[1] و نگاشت استریوگرافیک[2] و بر اساس مختصات ژنومی [۱۲] دیده نشده است. به همین منظور، ابتدا نگاشت استریوگرافیک را به همراه مدل هیگز معرفی کرده و سپس آن را برای نظریهٔ بیان‌شده به کار می‌بریم.

۳. نگاشت استریوگرافیک و روش هیگز

هندسهٔ استریوگرافیک، در واقع یک نگاشت یک‌به‌یک و وارون‌پذیر بین دو مجموعه مهیا می‌کند. تمام نقاط نیمهٔ پایینی سطح کره توسط نگاشت استریوگرافیک به یک صفحهٔ تخت که آن را صفحهٔ نگاشت ζ می‌نامیم نگاشته می‌شوند. البته این نگاشت، تمام نقاط روی نیمهٔ سطح

---

[1] Higgs
[2] Stereographic

پایینی کره را به غیر از نقاط استوایی به صورت یک‌به‌یک بر روی صفحهٔ مماس می‌نگارد. مجموعهٔ نقاط استوای کره را منطقهٔ تکین می‌نامیم چرا که نگاشت نقاط مرز نیم‌کره به صفحهٔ نگاشت، در بینهایت رخ می‌دهد. نکتهٔ خیلی مهم که باید یادآور شد این است که صفحهٔ مماس ζ، فضای نگاشت تمام نقاط سطح درونی یا بیرونی کره است که دارای انحنای منفی یا مثبت هستند. این یک تمایز فیزیکی است. کار حاضر دلیلی بر متفاوت بودن نتیجهٔ نگاشت نظریهٔ میدان از این دو سطح با انحناهای متفاوت به صفحه ζ است، چرا که از دیدگاه دینامیک نیوتونی، برای مقید بودن به سطح بیرونی کره به یک نیروی مرکزگرا و برای مقید بودن به سطح درونی کره به یک نیروی گریزازمرکز نیاز است. همچنین مجموع زوایای داخلی یک مثلث بر این دو سطح متفاوت خواهد بود. این تفاوت فیزیکی خمش در رویه، به صورت تفاوت علامت در پارامتر انحنای رویه ظاهر می‌شود. اساس این تحقیق و تأکید آن به دسترس‌پذیری نقاط رویه‌ها با خمش-های متفاوت و هم‌ارزی نظریهٔ میدان بر روی رویه‌ها با میدان برهمکنشی است. از همین تفاوت کلاسیکی و سادهٔ رویه‌ها، برای استناد به تفکیک سطح مماس فضای بیرون و درون کره استفاده می‌کنیم. در واقع نشان خواهیم داد که فیزیک نگاشته‌شده از این رویه‌ها با انحنای متفاوت به صفحه نگاشت ζ، به فیزیک و نتایج متفاوتی منتهی خواهد شد.

مقید بودن میدان به رویه ـ سطح داخلی یا خارجی کره ـ قید مسئله است. روش مطالعهٔ سیستم های مقید، اعمال قید بر دینامیک سیستم است.

در کلی‌ترین حالت، قیدهای حاکم بر مسئله، با پذیرش ضرایب نامعین لاگرانژ وارد لاگرانژی یا هامیلتونی توصیف‌کنندهٔ مسئله می‌شوند. اما، می‌توان در یک روند غیر رسمی، قیدها را به صورت مستقیم بر هامیلتونی مسئله اعمال نمود. به این ترتیب، درجات آزادی سیستم و پیرو آن هامیلتونی مسئله کوچکتر و تعداد معادلات دینامیکی کمتر خواهند شد. برای این مسئله، یکی از قیدها، مقید بودن میدان به رویه است که آن را به صورت رابطهٔ $q_1^2+q_2^2+q_0^2=R^2$ و کاهش درجهٔ آزادی سیستم را به هامیلتونی وارد می‌کنیم. قید بعدی، دسترس‌پذیری سطح داخلی یا خارجی رویه است که آن را با تعریف پارامتر خمش رویه ـ منفی یا مثبت ـ در هامیلتونی مسئله لحاظ می‌کنیم. حال اگر مختصات دکارتی نقطهٔ $\vec{r}$ را در درون یا بیرون سطح کره‌ای به شعاع R با (q_1,q_2,q_0) نشان دهیم (با این فرض که مبدأ مختصات در مرکز کره قرار دارد و محور q_0 عمود بر صفحهٔ نگاشت است)، آنگاه این مختصات در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$q_1^2+q_2^2+q_0^2=R^2=\frac{1}{\kappa}, \tag{۷}$$

که در آن، κ خمیدگی سطح کره است که برای نقاط دسترس‌پذیر درون سطح کره مقداری منفی و به‌ازای نقاط دسترس‌پذیر بیرون سطح کره مثبت خواهد بود. اکنون، اگر نقاط روی صفحهٔ نگاشت (صفحهٔ تخت ζ) را با محورهای x و y شبکه‌بندی کنیم و با مختصات x و y نشان دهیم، آنگاه نگاشت استریوگرافیک بر حسب مؤلفه‌ها چنین خواهد بود

$$q_1 = \sqrt{\frac{R^2}{R^2+\rho^2}}\, x, \quad q_2 = \sqrt{\frac{R^2}{R^2+\rho^2}}\, y, \quad q_0 = \sqrt{\frac{R^4}{R^2+\rho^2}} \tag{۸}$$

ادامهٔ مطلب، به‌ازای $\kappa < 0$ یعنی نقاط درونی سطح کره خواهد بود که با تبدیل $\kappa \to -\kappa$ به نقاط بیرونی سطح کره خواهیم رسید. با مرتب‌سازی ساده‌ای، می‌توان پارامتر خمش فضا (κ) را در آن‌ها مشاهده کرد،

$$q_1 = \sqrt{\frac{1}{1-\kappa\rho^2}}\, x, \quad q_2 = \sqrt{\frac{1}{1-\kappa\rho^2}}\, y, \quad q_0 = \sqrt{\frac{1}{-\kappa(1-\kappa\rho^2)}} \tag{۹}$$

و البته رابطهٔ وارون نیز چنین خواهد بود

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa p^2}}\, q_1, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1+\kappa p^2}}\, q_2 \tag{۱۰}$$

اکنون می‌توانیم بردار مکان رویهٔ مورد نظر را بر حسب مختصات جدید (x,y) بازنویسی کنیم. به‌ازای $\kappa < 0$ مشکلی در تعریف $A_{-} = \sqrt{1-\kappa\rho^2}$ و $\sqrt{-\kappa}$ وجود ندارد. با استفاده از تعریف A_{-} و بر پایهٔ روش هیگز، بردار مکان در صفح÷ ζ نیز به صورت زیر بیان می‌شود،

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{A_{-}}x, \frac{1}{A_{-}}y, \frac{1}{\sqrt{-\kappa}A_{-}}\right), \tag{۱۱}$$

در ادامه، اصلی‌ترین کمیتی که باید تعیین شود متریک فضای نگاشت یعنی متریک ζ است. در واقع با شناسایی متریک فضای نگاشت، می‌توان فیزیک را تا حد زیادی بنا کرد. بنابراین، با تعریف $\vec{r}_x = \frac{\partial}{\partial x}\vec{r}$ و $\vec{r}_y = \frac{\partial}{\partial y}\vec{r}$ از رابطهٔ (۱۱)، متریک صفحه نگاشت را به صورت $ds^2 = \vec{r}_i.\vec{r}_i dx^i dx^i = g_{ij}dx^i dx^j$ تعیین خواهیم کرد. با محاسبهٔ مستقیم از رابطهٔ (۱۱)، می‌توان چنین نوشت

$$\vec{r}_x = \left(\frac{1-\kappa y^2}{A_{-}^3}, \frac{\kappa yx}{A_{-}^3}, \frac{\kappa x}{\sqrt{-\kappa}A_{-}^3}\right), \tag{۱۲}$$

و به طور مشابه خواهیم داشت

$$\vec{r}_y = \left(\frac{\kappa xy}{A_{-}^3}, \frac{1-\kappa x^2}{A_{-}^3}, \frac{\kappa y}{\sqrt{-\kappa}A_{-}^3}\right), \tag{۱۳}$$

به این ترتیب، عناصر متریک صفحهٔ نگاشت به صورت زیر قابل بیان هستند

$$\vec{r}_x\cdot\vec{r}_x=\frac{(1-\kappa y^2)^2+\kappa^2y^2x^2-\kappa x^2}{A_-^{\;6}}=\frac{(1-\kappa y^2)}{A_-^{\;4}},$$
$$\vec{r}_y\cdot\vec{r}_y=\frac{(1-\kappa x^2)^2+\kappa^2x^2y^2-\kappa y^2}{A_-^{\;6}}=\frac{(1-\kappa x^2)}{A_-^{\;4}},\tag{۱۴}$$

و

$$\vec{r}_x\cdot\vec{r}_y=\frac{(1-\kappa y^2)\kappa xy+\kappa yx(1-\kappa x^2)-\kappa xy}{A_-^{\;6}}=\frac{\kappa xy}{A_-^{\;4}},\tag{۱۵}$$

به این ترتیب، می‌توان متریک فضایی فضای نگاشت را استخراج کرد. یعنی متریک صفحهٔ ζ به‌ازای فضای دسترس‌پذیر نیمهٔ پایینی سطح درونی کره به صورت زیر خواهد بود

$$\gamma_-=\frac{1}{A_-^{\;4}}\begin{pmatrix}1-\kappa y^2 & \kappa xy\\ \kappa yx & 1-\kappa x^2\end{pmatrix},\tag{۱۶}$$

از این رو، برای دیفرانسیل طول خواهیم داشت

$$ds_-^{\;2}=(\frac{1-\kappa y^2}{A_-^{\;4}})dx^2+(\frac{1-\kappa x^2}{A_-^{\;4}})dy^2+2\kappa xydxdy,\tag{۱۷}$$

می‌دانیم که صفحهٔ نگاشت ζ تخت است، بنابراین متریک فضازمان بر پایهٔ صفحهٔ نگاشت ζ به صورت زیر بیان می‌شود

$$g_-^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-\kappa y^2}{A_-^{\;4}} & \frac{\kappa xy}{A_-^{\;4}}\\ 0 & \frac{\kappa yx}{A_-^{\;4}} & \frac{1-\kappa x^2}{A_-^{\;4}}\end{pmatrix},\tag{۱۸}$$

بدیهی است که روابط (۱۱) تا (۱۸)، با تبدیل $\kappa\to-\kappa$ برای نقاط دسترس‌پذیر بیرونی سطح کره معتبر خواهند بود. یعنی خواهیم داشت

$$g_+^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1+\kappa y^2}{A_+^{\;4}} & -\frac{\kappa xy}{A_+^{\;4}}\\ 0 & -\frac{\kappa yx}{A_+^{\;4}} & \frac{1+\kappa x^2}{A_+^{\;4}}\end{pmatrix},\ A_+=\sqrt{1+\kappa\rho^2},\tag{۱۹}$$

که در آن $g_-^{\mu\nu}$ و $g_+^{\mu\nu}$ به ترتیب متریک به‌ازای سطح درونی یا بیرونی کره است. از اینجا داریم

$$\sqrt{-g_\pm}=\frac{1}{A_\pm^{\;3}},\tag{۲۰}$$

٤. میدان اسکالر بر روی صفحهٔ نگاشت

می‌توان کنش میدان‌های اسکالر را بر روی سطح کره (S_+ و S_- به ترتیب برای نقاط بیرونی و نقاط درونی سطح کره به کار می‌روند) بر اساس متریک (۱۸) و (۱۹) به صورت زیر بنا نمود،

$$S_{\pm}=\int d^2x\,dt(\frac{1}{{A_{\pm}}^3})(-\frac{1}{2})(\partial_\alpha\varphi\, g_{\pm}^{\alpha\beta}\partial_\beta\varphi+m^2\varphi^2), \qquad (۲۱)$$

با توجه به معادلهٔ (۲۱)، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ میدان‌های اسکالر چنین خواهد بود

$$\partial^\alpha(\frac{g_{\pm\alpha\beta}}{{A_{\pm}}^3}\partial^\beta\varphi)+m^2(\frac{1}{{A_{\pm}}^3})\varphi=0, \qquad (۲۲)$$

با بازتعریف میدان‌های $\tilde{\varphi}_{\pm}=\sqrt{-g_{\pm}}\,\varphi$ و استفاده از اتحاد $\partial_\alpha\sqrt{-g_{\pm}}=\sqrt{-g_{\pm}}\Gamma^{\beta}_{\pm\alpha\beta}$ (به طوری که در آن $\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu}=\mathrm{m}\frac{3\kappa x_\alpha}{A_{\pm}^2}$) و اعمال این تغییرات به رابطهٔ (۲۲)، خواهیم داشت

$$\partial_\alpha(g_{\pm}^{\alpha\beta}(\partial_\beta\tilde{\varphi}_{\pm}-\Gamma^{\mu}_{\beta\mu}\tilde{\varphi}_{\pm}))-m^2\tilde{\varphi}_{\pm}=0, \qquad (۲۳)$$

به این ترتیب معادلهٔ حرکت به صورت زیر تحویل خواهد شد

$$\tilde{\varphi}_{\pm}-m^2\tilde{\varphi}_{\pm}-(\partial^\alpha\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu})\tilde{\varphi}_{\pm}-\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu}\partial^\alpha\tilde{\varphi}_{\pm}=0, \qquad (۲۴)$$

از آنجا که میدان را جرم‌دار در نظر گرفته‌ایم، می‌توانیم جملهٔ سوم را در جرم میدان جذب کنیم: $\bar{m}_{\pm}^2=m^2-\partial^\alpha\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu}$ و آنرا **جرم مؤثر وابسته به مکان** بنامیم. با وارد کردن جرم مؤثر، معادلهٔ حرکت به صورت نهایی زیر در می‌آید

$$\tilde{\varphi}_{\pm}-\bar{m}_{\pm}^2\tilde{\varphi}_{\pm}-\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu}\partial^\alpha\tilde{\varphi}_{\pm}=0, \qquad (۲۵)$$

دیده می‌شود که رابطهٔ (۲۵) در صفحهٔ نگاشت ζ، معادل توصیفی از یک میدان برهمکنشی با امواج گرانشی ضعیف در صفحهٔ مماس است. به هر حال، مطابق جملهٔ سوم رابطهٔ (۲۵) میدان اسکالر در صفحهٔ ζ نسبت به میدان اسکالر آزاد مشابه در این صفحه، دارای جملهٔ برهمکنشی از نوع جملهٔ برهمکنشی با میدان گرانشی ضعیف است. این جمله، باعث میرایی یا برانگیختگی میدان می‌شود. در واقع، آنچه از این نگاشت به دست می‌آید، این است که اثر یک رویهٔ دوبُعدیِ ناصاف، معادل وجود یک میدان گرانشی ضعیف است. همچنین با استناد به اینکه $\partial^\alpha\Gamma^{\mu}_{\pm\alpha\mu}=\mathrm{m}3\kappa\frac{A_{\mathrm{m}}^2}{A_{\pm}^4}$ و قرار دادن آن در رابطهٔ جرم مؤثر، رابطهٔ نهایی جرم مؤثر چنین خواهد شد

$$\bar{m}_{\pm}^2=m^2\pm3\kappa\frac{A_{\mathrm{m}}^2}{A_{\pm}^4}, \qquad (۲۶)$$

براساس تفسیر رابطه (۲۶)، جرم مؤثر مربوط به میدان مقید به سطح کره با انحنای منفی و انحنای مثبت متفاوت خواهد بود! و این یک نتیجهٔ غیر منتظره از تفکیک دو سطح یک رویه است. البته تا حدودی انتظار چنین پیامد مفهومی را از سطوحِ دارای انحنای منفی و مثبت می‌داشتیم چرا که می‌دانیم مجموع زوایای مثلث بر روی سطوحِ دارای انحنای منفی و مثبت، متفاوت است.

۵. نتیجه‌گیری

بر اساس تفاوت فیزیکی در تعریف نقاط داخلی و خارجی سطح کره، دو رویهٔ متفاوت با توپولوژی کره در نظر گرفتیم. با استفاده از نگاشت استریوگرافیک و در ادامه با روش هیگز، نقاط روی سطح داخلی و خارجی کره را به صفحهٔ مماس نگاشتیم و متریک صفحهٔ نگاشت را تعیین کردیم. میدان‌های اسکالر را به عنوان کمیت‌های فیزیکی مقید به رویهٔ مورد نظر با همین نگاشت به صفحهٔ مماس برده و با محاسبهٔ دینامیک میدان نشان دادیم که میدان در صفحهٔ مماس همانند میدان برهمکنشی با امواج گرانشی است. همچنین مشخص شد که میدان‌ها برانگیختگی را به ساختار هندسی در رویهٔ اصلی یا به میدان گرانشی معادل‌شده در صفحهٔ ζ باز پس می‌دهند بر اساس رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) واضح است که میدان‌های اسکالر در حال جذب و دفع انرژی هستند و اثر خمیدگی در فضا معادل با پس‌زمینهٔ گرانشی است. این نتایج به نتایج حاصل از نوشتن معادلات ماکسول بر روی سطح کره بسیار نزدیک است.

مراجع

۱. طاهره حسین‌زاده، علی مهدی‌فر، احسان عموقربان، برهم‌نهی حالت‌های همدوس غیر خطی روی سطح کره، مجلهٔ پژوهش فیزیک ایران، جلد ۱۳، شمارهٔ ۱ ۱۳۹۲.

2. G. Murguia, A. Raya, A. Sanchez, *et al*., “The electron propagator in external electromagnetic fields in low dimensions”, Am. J.Phys. **78** 2010.

3. L. Parker, Phys. Rev. **D22**, 1922-1934, 1980.

4. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **44**, 1559-1562, 1980.

5. A.D. Speliotopoulos, Phys. Rev. **D51**, 1701-1709, 1995.

6. A. Saha, S. Gangopadhyay, S. Saha, Phys. Rev. **D83**, 025004, 2011.

7. F. Pinto, Phys. Rev. Lett. **70**, 3839-3843, 1993.

8. Bryce S. Dewitt, Rev. Modern Phys., **29**, 3, 1957.

9. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman Publishing Company, San Francisco, 1973.

10. J. Weber, *General Relativity and Gravitational waves*, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1961.

11. L. Parker, D. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Space Time*, Cambridge University Press, New York, 2009.

12. P. W. Higgs, J. Phys. A: Math. Gen. **12**, 309, 1979.