

اثر زبری سطوح فرکتالی خودمتشابه بر سطح تماس حقیقی و انرژی بین مرزی مؤثر و چسبندگی^۱

منصوره صدیقی عطار^{۲*}، امیر علی مسعودی^۳

تاریخ ارسال: ۱۳۹۶/۰۸/۲۶

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۳/۲۳

تاریخ تصویب: ۱۳۹۷/۱۱/۲۷

چکیده

انرژی بین مرزی مؤثر سطح و سطح تماس حقیقی برای تماس بین زیرلایه سخت و جامد کشسان زیر در حالتی که هر دو سطح زیر فرکتال خودمتشابه هستند، با به کارگیری تئوری مکانیک تماسی پرسون و بسط آن برای دو سطح زیر در تماس با هم تحقیق شده است. به علاوه، اثر نماهای هارست متفاوت برای جامد کشسان و وجود تنش فشرده کننده غیر صفر در حدود 1 GPa در این کار بررسی شده است. هدف ما در این پژوهش، مقایسه تفاوت و تغییرات چسبندگی و سطح تماس مؤثر سطوح فرکتالی خودمتشابه با سطوح فرکتالی خودمتناسب است. با حل تحلیلی معادلات و محاسبات عددی مشخص می شود که آثار مشاهده شده در سطوح فرکتالی خودمتناسب، در این حالت نیز مشاهده می شود و انرژی بین مرزی مؤثر و سطح تماس مؤثر و چسبندگی در دامنه زبری بزرگتری نسبت به

^۱ شناسه دیجیتال (DOI): 10.22051/jap.2019.18109.1086

^۲ کارشناس ارشد فیزیک، دانشگاه الزهراء (نویسنده مسئول)؛ mansoureheddighi@gmail.com

^۳ استاد فیزیک، دانشگاه الزهراء.

سطوح فرکتالی خودمتناسب از بین می‌رود و با اعمال تنش فشرده‌کننده غیرصفر سطوح در تماس با یکدیگر باقی می‌مانند و افزایش زبری، سطح تماس را از بین نخواهد برد.

واژه‌های کلیدی: چسبندگی، فرکتال خودمتشابه، زبری، انرژی بین مرزی، همبستگی.

۱. مقدمه

امروزه تجهیزات میکرو- و نانوالکترومکانیکی و تولید میکروماشین‌ها و ساختارهای میکروماشینی معلق مانند صفحات و میله‌های مورد استفاده در ساخت حسگرهای شتاب‌دهنده توجه بسیاری را به خود معطوف کرده است. در تکامل چنین تجهیزاتی مهم‌ترین فاکتور چسبندگی و به هنگام لغزش، اصطکاک و سایش بین سطوح است که خود متأثر از چسبندگی است [۱-۶]. بنابراین، مطالعات بسیاری بر روی چسبندگی [۷-۱۱]، اثرات دمایی و زبری بر چسبندگی در تماس بین اجسام کشسان [۱۲]، وابستگی سطح تماس و چسبندگی به فشار [۱۳]، رابطه فشار و توزیع‌های سطح تماس با بزرگ‌نمایی [۱۴]، تأثیر زبری سطح در چسبندگی اجسام مایع با رویکرد ورود لوبریکانت مایع [۱۵]، مطالعات عددی چسبندگی [۱۶-۱۸] و اثرات جفت‌شدگی بین سطوح زبر [۱۹] انجام شده است. زبری سطح از جمله مهم‌ترین عواملی است که چسبندگی را کنترل می‌کند، بدین سبب که زبری سطح مساحت تماس حقیقی را بین سطوح کاهش می‌دهد و هر قدر مساحت تماس کمتر باشد، برهمکنش‌ها و نیروی چسبندگی کمتر است [۲۰، ۲۱]. کلی‌ترین تئوری مکانیک تماسی توسط پرسون ارائه شده است. او تمام مقیاس‌های طولی زبری سطح را در محاسبات وارد می‌کند [۷-۱۲] و نتایج و محاسبات را برای تماس بین دو جسم، یکی با سطح صاف و دیگری با سطح زبر نامنظم (معمولاً از نوع فرکتال خودمتناسب) ارائه می‌دهد. در کار دیگری [۱۹] بسطی برای تئوری پرسون در نظر گرفته می‌شود و هر دو سطح زبر و فرکتال خودمتناسب فرض می‌شوند. در این مقاله، یکی از سطوح را فرکتال خودمتشابه و دیگری را فرکتال خودمتناسب در نظر می‌گیریم و محاسبات و نتایج مربوط به چسبندگی (انرژی بین مرزی مؤثر) و سطح تماس حقیقی را برای این حالت ارائه می‌دهیم. در تئوری پرسون مهم است که به مقیاس طولی خاصی محدود نشویم. سطوح زبر نامنظم فرض می‌شوند و ناهمواری‌ها با تابع طیفی نمایی زبری سطح $C(q)$ از مرجع [۲۲] توصیف می‌شوند و سطح با بردارهای موج زبری سطح q توصیف می‌شوند که متناسب با

در تماس مستقیم است. انرژی بین مرزی مؤثر عبارت است از

$$\frac{V_{eff}(q_L)}{\Delta\gamma} = \frac{P(q_a)}{P(q_L)} \int_0^\infty dx (1 + \xi^2 x)^{1/2} e^{-x} - \frac{2\pi}{\delta} \frac{1}{P(q_L)} \int_{q_L}^{q_a} dq q^2 P(q) C(q) \quad (1)$$

$$C(q) = \frac{h_{rms}^2 \xi'^2}{2\pi (1 + \frac{q^2 \xi'^2}{2H})^{1+H}} \quad (2)$$

جمله اول معادله (۱) مربوط به انرژی چسبندگی و جمله دوم انرژی کشسانی است و سطح تماس حقیقی $P(\xi)$ از حل معادله انتگرالی زیر به دست می آید که معادله ولترای نوع اول است [۲۳] و به روش معکوس ماتریس به صورت عددی حل می شود،

$$\exp\left\{-\frac{[\sigma_a(\xi) + \sigma_0]^2}{4a(\xi)}\right\} = \int_1^\xi d\xi' S(\xi') \left[\frac{a(\xi)}{a(\xi) - a(\xi')}\right]^{\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{[\sigma_a(\xi) - \sigma_a(\xi')]^2}{4[a(\xi) - a(\xi')]}\right\} \quad (3)$$

$$P(\xi) = \int_1^\xi d\xi' S(\xi') \quad (4)$$

۲. روش کار

در این مقاله، ما از تئوری مکانیک تماسی پرسون و بسط آن برای دو سطح زبر [۷-۱۲، ۱۹] استفاده می کنیم و در محاسبات تابع طیفی نمایی زبری سطح معرفی شده در مرجع [۲۲] را به کار برده ایم. بررسی ها برای سطوح فرکتالی خودمتشابه انجام شده است. با توجه به تعریف سطوح فرکتال خودمتناسب و خودمتشابه از کتاب مفاهیم فرکتالی در رشد سطوح [۲۴]، تفاوت سطوح فرکتال خودمتشابه و خودمتناسب در نمای زبری H است که برای سطوح فرکتالی خودمتناسب $0 < H < 1$ و برای سطوح فرکتالی خودمتشابه $H = 1$ است. محاسبات برای سطوح فرکتالی خودمتشابه و تماس بین یک سطح خودمتشابه و یک سطح خودمتناسب به صورت تحلیلی و عددی انجام شده است و برای محاسبات عددی از روش معکوس ماتریس استفاده شده است.

۳. حل تحلیلی

در روابط مذکور، تابع طیفی نمایی زبری برای فرکتال هامعرفی شده است. پس از حل معادلات بالا با استفاده از تابع طیفی نمایی زبری از رابطه ۲، به دست می آید،

$$\xi^2 = h_{rms}^2 \left[\frac{-1 (\xi'^2 q^2 + 2H)(\xi'^2 q^2 + 2)}{2 \xi'^2 (H - 1) \left(\frac{1}{2} \frac{\xi'^2 q^2 + 2H}{H}\right)^{1+H}} \right] \quad (5)$$

$$U_{el} = \frac{2 h_{rms}^2}{\pi \xi'^2} \left[\frac{1}{4} \xi'^2 2\sqrt{2} \arctan \left(\frac{1}{2} \xi'^2 2\sqrt{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{q \xi'^2}{q^2 \xi'^2 + 2} \right] \quad (6)$$

$$a(\zeta) = \left(\frac{E^2 q_L^2 \xi'^2}{8(1-v^2)^2} \right) [(h_1^2) I + (h_2^2) II - 2\eta h_1 h_2 III] \quad (7)$$

که در رابطه بالا بخش های I و II و III به صورت زیر است

$$I = \int \frac{\zeta^3}{\left(1 + \frac{q_L^2 \xi'^2}{2H_1} \zeta^2\right)^{1+H_1}} d\zeta, \quad II = \int \frac{\zeta^3}{\left(1 + \frac{q_L^2 \xi'^2}{2H_2} \zeta^2\right)^{1+H_2}} d\zeta$$

$$III = \int \frac{\zeta^3}{\left[\left(1 + \frac{q_L^2 \xi'^2}{2H_1} \zeta^2\right)^{1+H_1} \left(1 + \frac{q_L^2 \xi'^2}{2H_2} \zeta^2\right)^{1+H_2} \right]^{\frac{1}{2}}} d\zeta$$

محاسبه I و II مانند یکدیگر است،

$$I, II = \left(\frac{-1}{2} \right) \left[\frac{\left(q_L^2 \xi'^2 \zeta^2 + 2H \right) \left(q_L^2 \xi'^2 \zeta^2 + 2 \right)}{q_L^4 \xi'^4 (H-1) \left(\frac{1}{2} \frac{q_L^2 \xi'^2 \zeta^2 + 2H}{H} \right)^{1+H}} \right]$$

برای محاسبه III با در نظر گرفتن $H_1 = 1$ برای فرکتال خودمتشابه و $a = (q_L^2 \xi'^2)/2$ می توان نوشت

$$III = \frac{1}{a} \left(\frac{H_2}{a} \right)^{\frac{1+H_2}{2}} \left[\frac{L^{1-H_2}}{1-H_2} - \left(\frac{1}{a} \right) L \left(\frac{aL^2}{H_2-1} - 1 \right) \times \frac{\text{hypergeom} \left(\left[1, \frac{1-H_2}{2} \right], \frac{3-H_2}{2}, \frac{aL^2}{H_2-1} \right)}{(H_2-1) \left(L^{2+H_2} - \frac{L^{H_2(H_2-1)}}{a} \right)} \right]$$

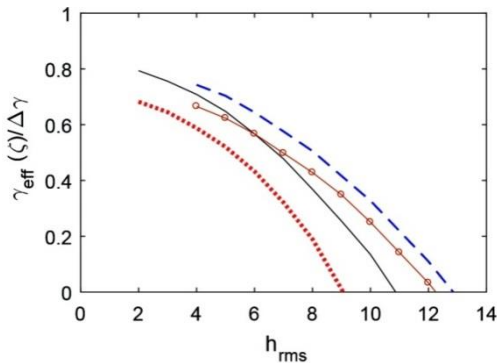
در این رابطه، L به این صورت است

$$L = \left(\zeta^2 + \frac{H_2}{a} \right)^{1/2}$$

۴. نتایج عددی

به منظور مقایسه نتایج حاصل از دو سطح فرکتالی خودمتناسب با دو سطح خودمتشابه از مقادیر استفاده شده در مراجع [۹، ۱۹] استفاده کرده ایم. در محاسبات، پهنای جامد کشسان و زیرلایه را یکسان در نظر گرفتیم. L اندازه خطی یا پهنای جامد کشسان و زیرلایه سخت و a ثابت شبکه است، $a=2.6 \text{ \AA}$ و $E.L=1331.2 \text{ \AA}$ مدول کشسانی، v نسبت پواسون، $\Delta\gamma$ تغییر در انرژی بین مرزی به ازای واحد سطح تماس برای سطح صاف و δ طول چسبندگی برای جسم جامد کشسان به این صورت است: $\Delta\gamma=100 \text{ meV/\AA}^2$ ، $v=0.42$ ، $\delta=0.68 \text{ \AA}$ ، $E=77.2 \text{ GPa}$ و نیز در محاسبات h_{rms} جذر میانگین مربعی زبری را نشان می دهد. شکل ۱ انرژی بین مرزی مؤثر γ_{eff} بر انرژی بین مرزی $\Delta\gamma$ برای سطوح صاف بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه نشان می دهد که از تئوری مکانیک تماسی پرسون به دست آمده است. در اینجا برای تماس کامل، هر دو سطح زبر هستند و سطوح در حالت بدون همبستگی $\eta=0$ بررسی شده اند. نمودار انرژی بین مرزی بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه دو سطح خودمتناسب با نمای هورست $H_{1,2} = 0.8$ به صورت نقطه

چین نشان داده شده است. مشاهده می شود که در این حالت، انرژی چسبندگی در زبری کمتری از بین می رود. منحنی پیوسته، برای حالتی که زیرلایه فرکتال خودمتناسب و جامد کشسان فرکتال خودمتشابه است، مربوط به نمای هورست $H_2 = 1$ و $H_1 = 0.8$ می شود. منحنی دایره دار حالت خودمتناسب است و $H_1 = 1$ و $H_2 = 0.8$ را نشان می دهد که سطح زیرلایه فرکتال خودمتشابه و بلوک کشسان فرکتال خودمتناسب است و انرژی بین مرزی این حالت بیش از دو حالت قبل است. منحنی خط چین دارای نماهای هورست $H_{1,2} = 1$ مربوط به زیرلایه و جامد کشسان خودمتشابه است و انرژی بین مرزی مؤثر در این حالت دارای بیشترین مقدار است.

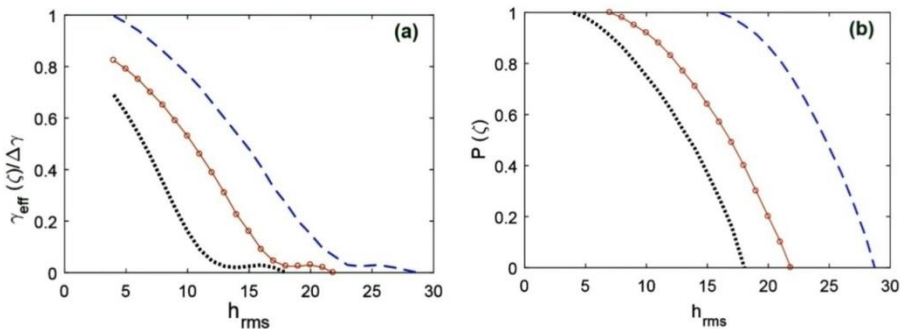


شکل ۱. انرژی بین مرزی مؤثر بر حسب زبری زیرلایه در حالت تماس کامل.

این امر احتمالاً به این علت رخ می دهد که فرکتال خودمتشابه سطحی همسانگرد است و دامنه زبری کوچکتری نسبت به فرکتال خودمتشابه دارد، زبری این سطوح افت و خیز کمتری دارد، سطوح هموارتر هستند و در این حالت مساحت تماس بین دو سطح بیشتر از سطوح فرکتالی خودمتناسب است و بنابراین چسبندگی بین سطوح افزایش می یابد اما در حقیقت سطوح به واسطه زبری با یکدیگر تماس جزئی برقرار می کنند و نواحی تماس به صورت حوزهای کوچکی هستند که در برابر یکدیگر فشرده می شوند.

در شکل ۲ انرژی بین مرزی مؤثر سطح و مساحت تماس حقیقی برای زیرلایه و جامد کشسان خودمتشابه، برای تماس جزئی در حالت های زیر نشان داده شده است. منحنی دایره دار دو سطح مستقل از هم $\eta = 0$ ، منحنی آبی $\eta = +1$ یعنی دو سطح جفت شدگی کاملاً مثبت دارند و منحنی نقطه چین جفت شدگی کاملاً منفی $\eta = -1$ را نشان می دهد. جذر میانگین مربعی زبری جامد کشسان را 6 \AA در نظر گرفته و برای زیرلایه از 1 \AA آن را تغییر می دهیم تا جایی که مساحت تماس

صفر شود. از منحنی‌ها مشخص می‌شود که وقتی دو سطح زبر جفت‌شدگی منفی دارند، انرژی بین مرزی و مساحت تماس کمترین مقدار و زمانی که جفت‌شدگی مثبت است، بیشترین مقدار را نسبت به حالت بدون جفت‌شدگی دارند که در توافق با بررسی انجام‌شده در کار تحقیقاتی [۱۹] است. به نظر می‌رسد این اثر به دلیل تغییرات سطح تماس بین دو جامد باشد. یعنی در جفت‌شدگی مثبت، برآمدگی‌های یک جامد در تماس با فرورفتگی‌های جامد دیگر قرار می‌گیرد و دو سطح کاملاً با یکدیگر جفت شده و در نتیجه سطح تماس افزایش می‌یابد. در نتیجه، سهم انرژی چسبندگی بیشتر از سهم انرژی کشسانیمی شود و بنابراین انرژی بین مرزی مؤثر سطوح افزایش می‌یابد. این استدلال برای سطوحی با جفت‌شدگی منفی به همین ترتیب اعمال می‌شود، با این تفاوت که در جفت‌شدگی کاملاً منفی، نوک ناهمواری‌ها در برابر یکدیگر قرار می‌گیرد و سطح تماس کاهش می‌یابد.



شکل ۲ (a) انرژی بین مرزی مؤثر γ_{eff} بر انرژی بین مرزی $\Delta\gamma$ برای سطوح صاف و (b) مساحت تماس حقیقی بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه برای دو سطح فرکتالی خودمتشابه به دست آمده از تئوری مکانیک تماسی پرسون.

در شکل ۳ (a) مقایسه تفاوت انرژی بین مرزی بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه نشان داده شده است، در حالی که یکی از سطوح فرکتال خودمتشابه و دیگری فرکتال خودمتناسب است. در این شکل مشاهده می‌شود در حالی که سطوح زبر، فرکتال خودمتشابه هستند، انرژی بین مرزی بیشتر است که ناشی از ماهیت زبری فرکتال خودمتشابه است. شکل ۳ (b) انرژی بین مرزی مؤثر سطح را نشان می‌دهد در حالی که زیرلایه فرکتال خودمتشابه و جامد کشسان فرکتال خودمتناسب و خودمتشابه با ناهای هورست $H_2 = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ است. مشاهده می‌شود که هرچه نمای هورست جامد کشسان بیشتر می‌شود، انرژی بین مرزی نیز افزایش می‌یابد. در این نمودار، برای نمای هورست $H=0.4$ با افزایش دامنه زبری برای زبری‌های کوچک، ابتدا افزایش و

سپس کاهشی در انرژی بین مرزی مشاهده می شود که برای مثال این اثر برای نمای هورست $H=0.8$ مشاهده نمی شود. می توان استدلالی مشابه را به کار برد که برای سطح فرکتالی خودمتناسب استفاده می شود [۹]. به ازای $q < q_0$ مقدار تابع طیفی نمایی زبری سطح ثابت و برای $q > q_0$ به صورت زیر به دست می آید،

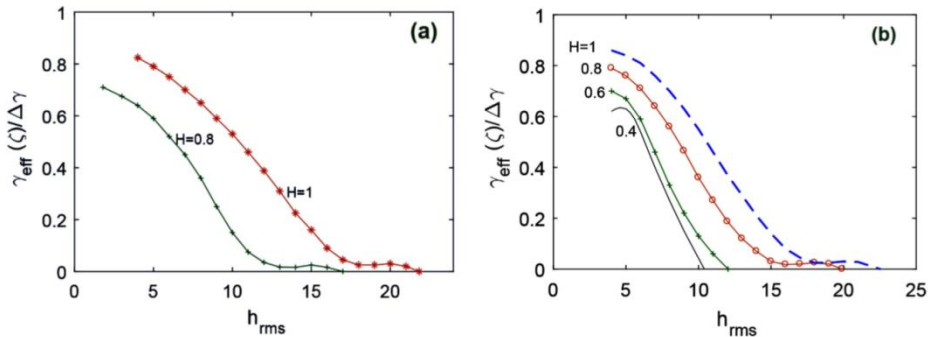
$$C(q) = \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)}$$

در این رابطه، $H=3-D_f$ و q_0 بردار موج قطعگران پایین است و h_0 توسط دامنه زبری rms به صورت $\langle h^2 \rangle = \frac{h_0^2}{2}$ تعیین می شود. با این رابطه، انرژی بین مرزی مؤثر به دست آمده به صورت

$$\frac{\gamma_{eff}}{\Delta\gamma} = 1 + \frac{1}{2}(q_0 h_0)^2 g(H) \left(1 - \frac{\alpha(H)}{q_0 \delta}\right), \quad \alpha(H) = 2 \frac{f(H)}{g(H)}$$

$$f(H) = \frac{H}{1-2H} (\zeta_1^{1-2H} - 1), \quad g(H) = \frac{H}{2(1-H)} (\zeta_1^{2(1-H)} - 1)$$

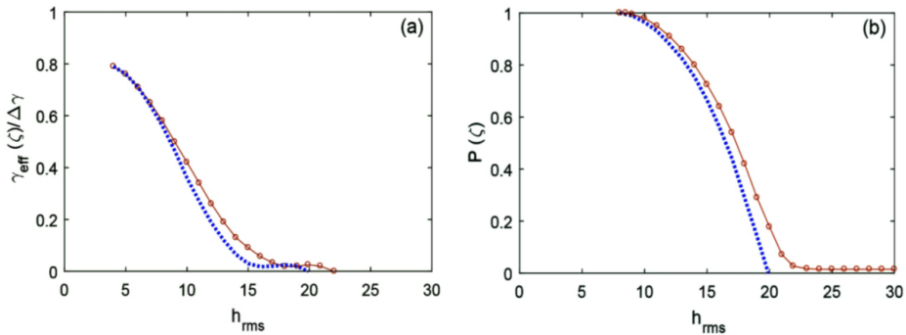
α پارامتر زبری نامیده می شود و هرچه مقدار آن بیشتر باشد، تغییرات انرژی بین مرزی کمتر است. $\alpha(H=0.8) = 0.235$ و $\alpha(H=0.4) = 0.073$ است، به طوری که $\alpha(0.4) \ll \alpha(0.8)$ است. این اتفاق از منظر فیزیکی رخ می دهد زیرا افزایش در سطح تماس (به علت زبری) هنگامی که $H=0.4$ است، نسبت به $H=0.8$ بسیار بیشتر است و این سهم چسبندگی را نسبت به انرژی کشسان افزایش می دهد.



شکل ۳ (a) انرژی بین مرزی مؤثر γ_{eff} بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه برای حالتی که سطوح فرکتال خودمتناسب هستند، منحنی نقطه چین، و فرکتال خودمتشابه، منحنی ستاره دار (b) انرژی بین مرزی مؤثر بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه برای چندین نمای هورست متفاوت.

در شکل ۴ انرژی بین مرزی مؤثر سطح و مساحت تماس حقیقی بر حسب جذر میانگین مربعی زیرلایه نشان داده شده است. هر دو منحنی در شکل ها مربوط به تماس بین یک زیرلایه خودمتشابه و جامد کشسان خودمتناسب با نمای هورست 0.8 است. منحنی نقطه چین تماس در تنش

فشرده کننده صفر و منحنی پیوسته در تنش $\sigma_0 = 11.03 \text{ GPa}$ را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود، وجود تنش فشرده کننده باعث می شود سطوح در تماس با یکدیگر باقی بمانند و بنابراین چسبندگی و انرژی مؤثر بین مرزی و سطح تماس حقیقی افزایش می یابد.



شکل ۴ (a) انرژی بین مرزی مؤثر γ_{eff} بر انرژی بین مرزی $\Delta\gamma$ برای سطوح صاف و (b) مساحت تماس حقیقی بر حسب جذر میانگین مربعی زبری زیرلایه به دست آمده از تئوری مکانیک تماسی پرسون. هر دو منحنی مربوط به زیرلایه خودمتشابه و جامد کشسان خودمتناسب با نمای زبری $H=0.8$ هستند. منحنی نقطه چین در تنش خارجی صفر و منحنی دایره دار مربوط به حالتی است که تنش $\sigma_0 = 11.03 \text{ GPa}$ است.

۵. خلاصه و نتیجه گیری

اثر زبری سطح بر انرژی چسبندگی و انرژی بین مرزی مؤثر سطح بررسی شده است در حالتی که یکی از سطوح دارای سطح زیر فرکتالی خودمتشابه است. دیدیم که در حالت تماس کامل و جزئی با تغییر نوع زبری سطح (سطح فرکتالی خودمتناسب به خودمتشابه) انرژی بین مرزی مؤثر سطح افزایش می یابد، زیرا فرکتال خودمتشابه سطحی همسانگرد است و در این حالت مساحت تماس بیشتر از سطح فرکتالی خودمتناسب است و بنابراین چسبندگی بین سطوح افزایش می یابد. سپس اثر زبری سطح در تماس جزئی مطالعه شد. ابتدا حالتی را در نظر گرفتیم که زیرلایه و جامد کشسان دارای سطح زیر فرکتالی خودمتشابه بودند و در محاسبات یک همبستگی عرضی نیز بین سطوح وارد می شود. نشان دادیم که با افزایش نمای هورست انرژی بین مرزی مؤثر سطح افزایش می یابد و نیز این انرژی در مقایسه با حالتی که زیرلایه دارای سطح فرکتالی خودمتناسب است، بیشتر است. در پایان، اثر تنش فشرده کننده را مطالعه کردیم و متوجه شدیم زمانی که تنش وارد می شود، انرژی چسبندگی و مساحت تماس حقیقی برای حالتی که زیرلایه فرکتال خودمتشابه است، افزایش می یابد و می توان نتیجه گرفت که با افزایش فشار، سطوح در تماس با یکدیگر می مانند و افزایش زبری، سطح تماس را از بین نخواهد برد.

مراجع

- [1] Y. P. Zhao, L. S. Wang and T. X. Yu, *J. Adhesion Sci. Technol.* **17** 519(2003).
- [2] J. Bico, C. Marzolin and D. Quere, *Europhys. Lett.* **47** 220 (1999).
- [3] Gui C, Elwenspoek M, Tas N and Gardeniers J G E 1999 *J. Appl. Physics* **85** 7448.
- [4] B. N. J. Persson, *Phys. Rev.* **B71** 035428(2005).
- [5] M. Scherge and S. Gorb, *Biological Micro and Nano Tribology*, Springer, Berlin(2001).
- [6] B. N. J. Persson, S. Gorb, *J. Chem. Phys.* **119**, 11437(2003).
- [7] S. Zilberman, B.N.J. Persson, to be published in *Solid State Commun.*
- [8] B.N.J. Persson, E. Tosatti, *J. Chem. Phys.* **115** 5597 (2001).
- [9] B.N.J. Persson, *Eur. Phys. J. E.* **8**,385-401 (2002).
- [10] B.N.J. Persson, *J. Chem. Phys.* **115**, 3840 (2001).
- [11] B.N.J. Persson, F. Bucher, B. Chiaia, to be published in *Phys. Rev. B* **65**, 184106 (2002).
- [12] S. Zilberman, B. N. J. Persson, *JOURNAL of CHEMICAL PHYSICS*, **118**(2003).
- [13] V. A. Yastrebova, G. Anciaux, J. F. Molinari, *Int. J. Solids Srtuct.* **52** 83 (2015).
- [14] B. D. Dapp, N.Prodanov, M. H. Muser, *J. Phys.: Condens. Matter*, **26** 355002 (2014).
- [15] V. N. Samoilov, I. M. Sivebeak, B.N.J. Persson, **21** (2004).
- [16] S. Hyuna, M. O. Robbins, *Tribol. Int.* **40** 1413(2007).
- [17] S. Hyun, J. F. Molinari, M. O. Robbins, *Phys. Rev. E* **70** 026117(2004).
- [18] G. Carbone, M. Scaraggi, U. Tartaglino, *Eur. Phys. J. E.* **30** 65 (2009).
- [19] M. Feshanjerdi, A. A. Masoudi, M. Khorrami, *J. Stat. Mech. Theor. Exp*, 02018 (2015).
- [20] B. N. J. Persson, *J. Phys. Condens.* **18** 7789(2006).
- [21] H. Gao, X. Wang, H. Yao, S. Grob , E. Artz, *Mech, Matter*, **37** 275(2005).
- [22] G. Palasantzas, *Physical Review B*, **48**(19): p. 14472-14478 (1993).
- [23] W. H.Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in FORTRAN*, 2nd Ed(1992).
- [24] A. L. Barabashi, H. E. Stanley, "Fractal Concepts in Surface Growth", 2nd ed, Cambridge(1997).