مجلهٔ فیزیک کاربردی دانشگاه الزهرا(س)
سال هشتم، پیاپی ۱۴، بهار و تابستان ۱۳۹۷

مدل‌سازی جواب‌های سالیتونی معادلهٔ غیرخطی تعمیم‌یافته رادهاکریشنان‌ـ‌کاندو‌ـ‌لاکشمینن [1]

احمد نیرمه [2]

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۰۵/۰۱
تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۱/۰۸
تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

بنیادهای زیادی از مسائل در علوم مختلف از جمله فیزیک و ریاضی و مهندسی به طور ذاتی غیرخطی هستند که آن‌ها را می‌توان به معادلات دیفرانسیل عادی تجزیه کرد. به جز تعداد محدودی از این معادلات که حل تحلیلی دقیق دارند، بیشتر این مسائل حل دقیق ندارند و باید به وسیلهٔ شیوه‌های جدیدی مبتنی بر کدنویسی بر پایهٔ نرم‌افزارهایی چون میپل و متلب حل شوند. در سال‌های اخیر، تحقیقاتی زیادی برای حل این نوع معادلات صورت گرفته است که به روش‌های جدیدی برای حل این معادلات انجامیده است. در این مقاله بر آنیم تا با استفاده از یک تعمیم جدید برای شکل جواب‌ها در روش تبدیل بکلاند، با استفاده از نرم‌افزار میپل جواب‌های سالیتونی جدیدی برای معادلهٔ غیرخطی تعمیم‌یافتهٔ رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن بیان کنیم. از مزایای این روش می‌توان به تنوع جواب‌های حاصل اشاره کرد که در برگیرندهٔ جواب‌های مطرح‌شدهٔ این گونه معادلات با چندین روش مختلف است.

---

[1] شناسه دیجیتال (DOI): 10.22051/jap.2019.21375.1099

[2] استادیار دانشکدهٔ فنی و مهندسی مینودشت، دانشگاه گنبد کاووس، ایران؛ a.neirameh@gonbad.ac.ir

واژه‌های کلیدی: معادلهٔ غیر خطی رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن (Generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan)، جواب‌های سالیتونی، معادلهٔ موجی.

۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اغلب از الگوبرداری از قوانین اساسی طبیعت یا تجزیه و تحلیل ریاضی از طیف گسترده‌ای از مسائل موجود در ریاضیات کاربردی و فیزیک-ریاضی و علوم مهندسی به وجود می‌آید. اکثر قوانین طبیعی-فیزیکی، نظیر معادلات ماکسول، قوانین حرکت نیوتن، معادلات شرودینگر در مکانیک کوانتمی، بر حسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل بیانند. به عبارت دیگر، این قوانین پدیده‌های فیزیکی را به وسیلهٔ ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می دهند. وجود مشتقات در این معادلات بیشتر از این جهت است که مشتق‌ها پدیده‌های طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار، شدت جریان) را نمایش می‌دهند. در سال ۲۰۱۲ "یان استوارت" تحقیقات گستردهٔ خود را به صورت کتابی به نام "در تعقیب ناشناخته‌ها: ۱۷ معادله‌ای که دنیا را تغییر داد" منتشر کرد. در کتاب استوارت، اساسی‌ترین معادلات ریاضی، جمع‌آوری شدند و بیشتر از منظر ریاضیات، به جنبه و کاربرد آن‌ها در زندگی انسان نگریسته شده است. استوارت می گوید: "معادلات ریاضی گاهی خسته‌کننده و پیچیده به نظر می‌رسند و دلیلش هم این است که با روش‌های پیچیده و خسته‌کننده‌ای بیان شده‌اند". او در ادامهٔ توضیحات خود اضافه می کند "هر کسی می تواند از زیبایی و اهمیت این معادلات قدردانی کند بدون این که روش حل آن‌ها را بداند. هدف از معرفی این معادلات این است که جایگاه آن‌ها را در زندگی انسان درک کنیم و از جنبه‌های ناگفته و پنهان آن‌ها در تاریخ پرده برداریم". وی خاطرنشان کرد "این معادلاتْ بخش حیاتی و مهم فرهنگ ما هستند. چرا که هریک از آن‌ها داستانی به همراه خود دارند. این داستان‌های جذاب دربارهٔ افرادی است که آن‌ها را کشف کرده‌اند و به نوعی شرایط زمانی آن دوران را بیان بازگو می کنند". از جملهٔ این ۱۷ معادله می‌توان به معادلهٔ ناویر-استوکس، معادلهٔ ماکسول، معادلهٔ بلک شولز، معادلهٔ شرودینگر اشاره کرد که نشاندهندهٔ جایگاه بسیار مهم معادلات در علوم مختلف و پدیده‌های فیزیکی در عالم هستی است.

رد پای معادلات دیفرانسیل را در زمینه های مختلف علوم ریاضی، مهندسی، فیزیک و حتی علوم اجتماعی می‌توان یافت، زیرا این معادلات تغییرات را به زبان ریاضی بازگو می کنند. از آن‌جا که در این معادلات، توابع و مشتقات و دیفرانسیل‌ها به یکدیگر پیوند می‌خورد، از آن‌ها می‌توان

برای بیان پدیده‌های دینامیکی و تغییر و تحول بهره گرفت. از شاخه‌هایی از علوم که معادلات دیفرانسیل معمولی در آن‌ها کارکردی اساسی دارند، برای نمونه می توان به این موارد اشاره کرد: برخی حوزه های ریاضی مچون هندسه، علوم مهندسی همچون مکانیک تحلیلی و مهندسی برق (تحلیل رفتار مدارهای الکتریکی)، زمین‌شناسی (پیش‌بینی آب و هوا)، شیمی (تحلیل زنجیره‌های واکنش هسته‌ای)، زیست‌شناسی (گسترش بیماری‌های عفونی، تغییرات ژنتیکی)، بوم‌شناسی و مدل‌سازی جمعیت و اقتصاد (تغییرات سود و قیمت سهام). بسیاری از ریاضیدانان برجستهٔ تاریخ در حل و بحث معادلات دیفرانسیل معمولی نقش داشته‌اند، از جمله: نیوتن، لایب‌نیتس، خاندان برنولی، ریکاتی، الکسی کلرو، دالامبر، لئونارد اویلر. تاکنون محققین زیادی علاقه‌مندی فراوانی جهت حل این نوع معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی با استفاده از روش‌های متنوع در این زمینه مطرح کرده‌اند که از این جمله می توان به [۱۸-۱] اشاره نمود. در این مقاله، بر آنیم تا با معرفی تعمیم جدیدی از شکل جواب‌ها در روش تبدیل بکلاند، جواب‌های معادلهٔ غیرخطی تعمیم‌یافته رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن را در زیر [۱۹] به دست آوریم،

$$i\left(Q_t-\lambda\left(|Q|^{2m}Q\right)+\gamma Q_{xxx}\right)+aQ_{xx}+b|Q|^{2m}Q=0,$$
$$0<m<2,\qquad Q(x,0)=\frac{A}{\cosh(Bx)},-\infty<x<\infty \qquad (۱)$$

که در آن، l,g,a,b,A اعداد حقیقی هستند. روش کار با استفاده از نرم‌افزار میپل است که نرم‌افزاری بسیار قوی و کاربردی برای حل انواع محاسبات مختلف در ریاضی و فیزیک و مهندسی است.

ساختار این پژوهش به این صورت است: در ابتدا ساختار روش مد نظر را مطرح کرده، سپس معادلهٔ غیرخطی تعمیم‌یافتهٔ رادهاکریشنان -کاندو-لاکشمینن را بیان و با چندین تغییر متغیر موجی، این معادله را به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده و با جاگذاری مشتقات و توان‌های لازم که توسط میپل محاسبه کرده‌ایم، در معادلهٔ مد نظر به معادله‌ای با ضرایبی از تابع $F(x)$ با توان‌های مختلف می‌رسیم، که با حل ضرایب فوق در قالب یک دستگاه چند معادله -چند مجهولی توسط میپل به ضرایب مد نظر جواب‌ها می‌رسیم.

۲. روش تعمیم‌یافتهٔ بکلاند برای معادلهٔ ریکاتی

ابتدا، معادلهٔ ریکاتی را در نظر می گیریم

$$\varphi'(\xi)=\sigma+\varphi^2(\xi), \qquad (۲)$$

این معادله جواب‌هایی به صورت زیر دارد

(۳)

$$\varphi=\begin{cases}-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\,\xi\right), & \sigma<0,\\ -\sqrt{-\sigma}\coth\left(\sqrt{-\sigma}\,\xi\right), & \sigma<0,\\ -\dfrac{1}{\xi+\varpi},\varpi=const. & \sigma=0.\\ \sqrt{\sigma}\tan\left(\sqrt{-\sigma}\,\xi\right), & \sigma>0,\\ -\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{-\sigma}\,\xi\right), & \sigma>0,\end{cases}$$

جهت بررسی ساختار روش و نحوهٔ استفاده از آن، معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی را در حالت کلی زیر در نظر می‌گیریم

$$F(u,\ u_t,\ u_x,\ u_{xx},\ u_{xt},\ \ldots)\ =\ 0, \qquad (۴)$$

$u = u(x,\ t)$ تابع هدف است، که نامشخص است و F چندجمله‌ای بر اساس تابع u و مشتقات آن بر حسب x,t است. حال برای یافتن جواب‌های معادلهٔ غیرخطی (۳) از تغییر متغیر موجی زیر

$$u(x,\ t)\ = U(x),\ x = kx + ly + nt, \qquad (۵)$$

برای تبدیل کردن معادلهٔ (۴) به یک معادلهٔ دیفرانسیل معمولی غیرخطی به شکل

$$P(U,U',U'',\ \ldots)\ =\ 0. \qquad (۶)$$

استفاده می‌کنیم که در آن k,l,v مقادیر ثابتند که بعداً محاسبه خواهد شد.

در ادامه، طی چند مرحله نحوهٔ رسیدن به جواب در حالت کلی مطرح خواهد شد.

مرحلهٔ اول: فرض می‌کنیم معادلهٔ (۶) جوابی به صورت زیر داشته باشد که ایدهٔ اصلی این روش است،

$$U(\xi)\ =\sum_{i=0}^{N}A_i\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{i}+\sum_{i=1}^{N}B_i\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{-i} \qquad (۷)$$

که در آن A_i,B_i مقادیر ثابتند که محاسبه خواهند شد و $y(x)$ از تبدیل بکلاند برای معادلهٔ ریکاتی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

(۸)

$$y(x)\ =\ \frac{-\ sB\ +\ Dj\ (x)}{D\ +\ B\ j\ (x)}$$

که در آن، $y(x)$ در معادلهٔ ریکاتی زیر صدق می‌کند

$$y'(x)\ =\ s\ +\ y^2(x), \qquad (۹)$$

در این رابطه B,D مقادیر دلخواه هستند و s مقداری ثابت است که محاسبه خواهد شد و $B \neq 0$، در ضمن $j(x)$ دارای جواب مشخص از رابطهٔ (۳) می‌باشد. جهت تسهیل در به دست آوردن مشتقات معادلهٔ (۷) فرض می کنیم

$$F = t + y(x) \qquad (۱۰)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{N} A_i (F)^i + \sum_{i=1}^{N} B_i (F)^{-i} \qquad (۱۱)$$

در ضمن داریم

$$\psi'(\xi) = \sigma + \psi^2(\xi) \Rightarrow F' = \psi'(\xi) = \sigma + F^2 - 2F\tau + \tau^2 \qquad (۱۲)$$

مرحلهٔ دوم: با در نظر گرفتن توازن همگن [۶] بین جملهٔ غیرخطی و بالاترین مرتبهٔ مشتق در معادلهٔ (۶)، که پس از جاگذاری معادلات (۱۰-۱۲) مقدار عدد صحیح Nدر معادلهٔ (۶) محاسبه می شود.

مرحلهٔ سوم: با جاگذاری توان‌ها و مشتقات لازم تابع U در معادلهٔ (۴) و مرتب‌سازی بر اساس توان‌های مختلف F و همچنین مساوی صفر قرار دادن ضرایب F به مجموعه‌ای از عبارت‌های جبری می‌رسیم که با حل این عبارات با استفاده از میپل ضرایب لازم A_i, B_i, w و rرا به دست می‌آوریم.

۳. به‌کارگیری ساختار روش بکلاند برای معادله رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن

در روش مطرح‌شده جهت تبدیل معادلهٔ (۱) به معادلهٔ معمولی غیرخطی، تغییر متغیر موجی زیر را در نظر می گیریم

$$Q(x,t) = u(x,t)\,\mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+C)} \qquad (۱۳)$$

با جاگذاری (۱۳) در (۱) داریم

$$\begin{aligned} &(w + ak^2 + gk^3)u - (b - l k)u^{2m+1} - (a + 3gk)u_{xx} = 0, \\ &u_t - (2ak + 3gk^2)u - l(2m+1)u^{2m}u_x - gu_{xxx} = 0, \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

حال با تغییر متغیر $u(x,t) = u(x), x = x + Bt$ در معادلهٔ (۱۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\left(\omega + ak^2 + \gamma k^3\right)u - \left(b - \lambda k\right)u^{2m+1} - \left(a + 3\gamma k\right)u'' = 0, \\ &Bu' - \left(2ak + 3\gamma k^2\right)u - \lambda\left(2m+1\right)u^{2m}u' - \gamma u''' = 0, \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با انتگرال گیری از معادلهٔ دوم (۱۵) و هم‌ارز قرار دادن با معادلهٔ اولی روابط زیر را خواهیم داشت

$$a = \frac{-3gk}{3}, \frac{w + ak^2 + gk^3}{B} = \frac{b - l k}{l} = \frac{a + 3gk}{g}. \qquad (۱۶)$$

که در آن

$$a = \frac{g(-4kl + b)}{l}, w = \frac{3gk^3 l - bgk^2 - Bkl + Bb}{l} \qquad (۱۷)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۶) و (۱۷) معادلهٔ اول (۱۵) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$b_1 u - u^{2m+1} - b_2 u'' = 0,$$
$$b_1 = \frac{B}{\lambda}, b_2 = \frac{\gamma}{\lambda} \qquad (۱۸)$$

با در نظر گرفتن بالانس همگن بین u^{2m+1} و $u¢$ در معادلهٔ (۱۸) داریم $N = \frac{1}{m}$. مجدداً تغییر متغیر $u = v^{\frac{1}{m}}$ را در نظر می‌گیریم خواهیم داشت

$$b_1 v^2 - v^3 - \frac{b_2(1-p)}{p^2} v'^2 + \frac{b_2}{p^2} v v'' = 0. \qquad (۱۹)$$

با در نظر گرفتن توازن همگن بین $vv¢$ و v^3 در معادلهٔ (۱۹) خواهیم داشت $N = 2$، بنابراین طبق رابطهٔ (۷) جواب معادلهٔ (۱۹) را در حالت کلی به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$v(x) = A_0 + A_1(m + y(x)) + A_2(m + y(x))^2 + B_1(m + y(x))^{-1} + B_2(m + y(x))^{-2} \qquad (۲۰)$$

طبق رابطهٔ (۱۰) با در نظر گرفتن $F = t + y(x)$ و جاگذاری آن در معادلهٔ (۲۰) و سپس جاگذاری آن و مشتقات و توان‌های لازمش در معادلهٔ (۱۹) با استفاده از محاسبات پیچیده که فقط با نرم افزاری همچون میپل قادر به ساده کردن آن‌ها هستیم، یکی از حالات جواب را با صفر در نظر گرفتن ضرایب $F^m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ به صورت زیر خواهیم داشت

$$p = \frac{4}{7},$$
$$A_0 = \frac{1}{3}\frac{b_1(3s^2 + 6st^2 + 3t^4 + 3t^2 + 2s)}{(s + t^2)^2}, \qquad (۲۱)$$
$$A_1 = -\frac{2b_1 t}{(s + t^2)^2}, A_2 = \frac{B_1}{(s + t^2)^2},$$
$$B_2 = \frac{4}{21}\frac{B_1}{(s + t^2)^2},$$

با جاگذاری ضرایب فوق در رابطهٔ (۲۰) به همراه روابط (۱۳) و (۳) جواب‌های معادلهٔ (۱) را با تغییر متغیرهای مطرح‌شده در یک فرایند بازگشتی به صورت زیر خواهیم داشت

$$v(x) = \frac{1}{3}\frac{b_1\left(3s^2+6st^2+3t^4+3t^2+2s\right)}{\left(s+t^2\right)^2} - \frac{2b_1 t}{\left(s+t^2\right)^2}\left(t+y(x)\right) + \frac{B_1}{\left(s+t^2\right)^2}\left(t+y(x)\right)^2 + B_1\left(t+y(x)\right)^{-1} + \frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(s+t^2\right)^2}\left(t+y(x)\right)^{-2}$$

بنابراین داریم

$$u(\xi) = \left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2} - \frac{2b_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right) + \frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right)^2 + B_1\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{-1} + \frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}}$$

حال طبق فرایند بازگشتی مطرح‌شده جواب‌های معادلهٔ (۱) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$Q(x,t) = \left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2} - \frac{2b_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right) + \frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right)^2 + B_1\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{-1} + \frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\psi(\xi)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx-\omega t+C)}$$

جواب های معادله غیرخطی تعمیم یافته رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن $s < 0$ برای حالتی که

$$Q_1(x,t) = \left[\frac{1}{3}\frac{B_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2} - \frac{2B_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right) + \frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^2 + B_1\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-1} + \frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\tanh\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx-\omega t+C)}$$

همچنین

$$Q_2(x,t)=\left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}-\right.$$
$$\frac{2b_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\cot h\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)+$$
$$\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\cot h\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^2+$$
$$B_1\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\cot h\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{-\sigma}\cot h\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}}\mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+C)}$$

برای حالتی که $s>0$ جواب ها عبارتند از

$$Q_3(x,t)=\left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}-\right.$$
$$\frac{2b_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\sqrt{\sigma}tan\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)+$$
$$\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\sqrt{\sigma}tan\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^2+$$
$$B_1\left(\tau+\sqrt{\sigma}tan\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau+\sqrt{\sigma}tan\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}}\mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+C)}$$

و

$$Q_4(x,t)=\left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}-\right.$$
$$\frac{2b_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)+$$
$$\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^2+$$
$$B_1\left(\tau-\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-1}+$$
$$\left.\frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\sqrt{\sigma}\cot\left(\sqrt{-\sigma}\,(x+Bt)\right)\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}}\mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+C)}$$

و برای حالتی که $s = 0$ جواب‌ها عبارتند از

$$Q_5(x,t)=\left[\frac{1}{3}\frac{b_1\left(3\sigma^2+6\sigma\tau^2+3\tau^4+3\tau^2+2\sigma\right)}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}-\right.$$

$$\frac{2B_1\tau}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\frac{1}{x+Bt+\bar{\omega}}\right)+\frac{b_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\frac{1}{x+Bt+\bar{\omega}}\right)^2+$$

$$\left.B_1\left(\tau-\frac{1}{x+Bt+\bar{\omega}}\right)^{-1}+\frac{4}{21}\frac{B_1}{\left(\sigma+\tau^2\right)^2}\left(\tau-\frac{1}{x+Bt+\bar{\omega}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{m}}\mathrm{e}^{i(-kx-\omega t+C)}$$

٤. نتیجه‌گیری

به طور خلاصه می‌توان گفت که در این پژوهش تعمیم جدیدی برای روش تبدیل بکلاند برای معادلهٔ غیرخطی تعمیم‌یافتهٔ رادهاکریشنان-کاندو-لاکشمینن با موفقیت استفاده شده است. جواب‌های به‌دست‌آمده در مقایسه با روش‌هایی چون جیپریم جی یا تانژانت کتانژانت و خدریاشف، دقیق‌تر و روش مد نظر روشی سازگار و سریع جهت به دست آوردن جواب‌های معادلاتی از این نوع است، که می‌توان برای سایر معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی دیگر نیز به کار برد.

مراجع

[1] M. Alquran, Bright and dark soliton solutions to the Ostrovsky–Benjamin–Bona–Mahony (OS-BBM) equation, J. Math. Comput. Sci. 2 (1) (2012) 15.

[2] H. Rezazadeh, A. Korkmaz, M. Eslami, J. Vahidi, R. Asghari, Traveling wave solution of conformable fractional generalized reaction Duffing model bygeneralized projective Riccati equation method, Opt. Quantum. Electron. 50 (2018) 150.

[3] M. Eslami, M. Mirzazadeh, B.F. Vajargah, A. Biswas, Optical solitons for the resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependentcoefficients by the first integral method, Optik 125 (13) (2014) 3107–3116.

[4] M. Eslami, F.S. Khodadad, F. Nazari, H. Rezazadeh, The first integral method applied to the Bogoyavlenskii equations by means of conformablefractional derivative, Opt. Quantum. Electron. 49 (12) (2017) 391.

[5] Q. Zhou, M. Ekici, A. Sonmezoglu, M. Mirzazadeh, M. Eslami, Optical solitons with Biswas–Milovic equation by extended trial equation method,Nonlinear Dyn. 84 (4) (2016) 1883–1900.

[6] H. Aminikhah, A.R. Sheikhani, H. Rezazadeh, Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractionalderivatives, Sci. Iran. Trans. B: Mech. Eng. 23 (3) (2016) 1048.

[7] M. Eslami, Trial solution technique to chiral nonlinear Schrodinger's equation in (1+ 2)-dimensions, Nonlinear Dyn. 85 (2) (2016) 813–816.

[8] H. Aminikhah, A.H. Sheikhani, H. Rezazadeh, Travelling wave solutions of nonlinear systems of PDEs by using the functional variable method,Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática 34 (2) (2015) 213–229.

[9] M. Hubert, G. Betchewe, M. Justin, S.Y. Doka, K.T. Crepin, A. Biswas, Q. Zhou, A.S. Alshomrani, M. Ekici, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons withLakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified extended direct algebraic method, Optik 162 (2018) 228–236.

[10] J. Manafian, M. Foroutan, A. Guzali, Applications of the ETEM for obtaining optical soliton solutions for the Lakshmanan–Porsezian–Daniel model,Eur. Phys. J. Plus 132 (11) (2017) 494.

[11] A. Bansal, A. Biswas, H. Triki, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons and group invariant solutions to Lakshmanan–Porsezian–Danielmodel in optical fibers and PCF, Optik 160 (2018) 86–91.

[12] A. Biswas, Y. Yildirim, E. Yasar, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified simpleequation method, Optik 160 (2018) 24–32.

[13] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, H. Triki, F.B. Majid, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Mirzazadeh, M. Belic, Optical solitons withLakshmanan–Porsezian–Daniel model using a couple of integration schemes, Optik 158 (2018) 705–711.

[14] J. Guzman, R.T. Alqahtani, Q. Zhou, M.F. Mahmood, S.P. Moshokoa, M.Z. Ullah, A. Biswas, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Danielmodel with spatio-temporal dispersion using the method of undetermined coefficients, Optik 144 (2017) 115–123.

[15] C. Yan, A simple transformation for nonlinear waves, Phys. Lett. A 224 (1–2) (1996) 77–84.

[16] Z. Yan, New explicit travelling wave solutions for two new integrable coupled nonlinear evolution equations, Phys. Lett. A 292 (1–2) (2001) 100–106.

[17] G. Yel, H.M. Baskonus, H. Bulut, Novel archetypes of new coupled Konno–Oono equation by using sine–Gordon expansion method, Opt. Quantum.Electron. 49 (9) (2017) 285.

[18] H.M. Baskonus, T.A. Sulaiman, H. Bulut, On the novel wave behaviors to the coupled nonlinear Maccaris system with complex structure, Optik 131(2017) 1036–1043.

[19] A. Biswas, 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, Physics Letters A, Volume 373, Issue 30, 6 July 2009, Pages 2546-2548