

Semantic of Logical Connective in Quantum Logic

S. Assadi¹
L. Nabavi²

Received: 2012.02.25

Accepted: 2012.07.02

Abstract

In quantum logic, each proposition is as a Hilbert closed subspace. So, negation of a proposition is as orthocomplement of a closed subspace and conjunction and disjunction of two propositions are respectively as intersection, and supremum of two closed subspaces. The purpose of this paper; while explication these cases, is definition of semantic of connective in algebraic and Kripkean methods and explanation the relation between these semantics and physical world.

Keywords: Quantum logic, Connective, Hilbert space, ortholattice, algebraic realization, Kripkean realization

1. Associate Professor of Philosophy, Tarbiat Modares University

2. Ph.D. student, Tarbiat Modares University

مجله فیزیک کاربردی دانشگاه الزهراء (س)

شماره ۲، بهار و تابستان ۱۳۹۱

معنا شناسی ادات ربط در منطق کوانتومی

سیاوش اسدی^۱

لطف الله نبوی^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۱۲/۷

تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۴/۱۱

چکیده

در منطق کوانتومی، هر گزاره معادل با یک زیرفضای بسته هیلبرت در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، نقیض یک گزاره، معادل با مکمل متعامد یک زیرفضای بسته، ترکیب عطفی دو گزاره، معادل با اشتراک دو زیرفضای بسته و ترکیب فصلی آنها، معادل با سوپریم دو زیرفضای بسته تعریف می‌شوند. این مقاله در تلاش است ضمن تبیین این موارد، معناشناسی ادات ربط در منطق کوانتومی را به دو صورت جبری و کریکیایی معرفی کند و ارتباط این معناشناسی‌ها را با جهان فیزیکی تشریح نماید.

^۱ دانشجوی دکتری فلسفه دانشگاه تربیت مدرس (نویسنده مسئول)

^۲ دانشیار گروه فلسفه دانشگاه تربیت مدرس، siavash.asadi2000@gmail.com

واژه های کلیدی: منطق کوانتومی، ادات ربط، فضای

هیلبرت، شبکه متعامد، تحقق جبری، تحقق کریپکیایی

مقدمه

آزمایش‌های متعددی نشان داده‌اند که منطق کلاسیک در حوزه کوانتوم با چالش‌هایی جدی روبروست و نمی‌توان برای تبیین پدیده‌های کوانتومی از منطق کلاسیک استفاده کرد^۱. بنابراین فون نویمان و بیرکهوف طی مقاله‌ای که در سال ۱۹۳۶ منتشر شد، منطق جدید و غیر کلاسیکی را معرفی کردند که بتواند بدون گرفتار شدن در چالش‌های منطق کلاسیک، پدیده‌های کوانتومی را تبیین کند. برای دست‌یابی به چنین منطقی، نمی‌توان پدیده‌های جهان فیزیکی را مستقیماً به مفاهیم منطقی مرتبط ساخت؛ بلکه برای برقراری ارتباط میان جهان فیزیکی و مفاهیم منطقی، به واسطه‌ای ریاضیاتی نیاز است که مطابق آنچه فون نویمان و بیرکهوف مطرح کرده‌اند، این واسطه ریاضیاتی، فضای هیلبرت و مفاهیم وابسته به آن در نظر گرفته می‌شود [1].

در این مقاله سعی بر این است که بدون وارد شدن به تعاریف، اثبات‌ها و دقائق این مفاهیم ریاضیاتی، به توضیح ملاحظات معنایی در منطق کوانتومی پردازیم و تنها از نتایج کار ریاضی‌دانان در این زمینه استفاده کنیم؛ هرچند در مواردی ورود به حیطه ریاضیات برای بیان مقصود نگارنده اجتناب‌ناپذیر است. بنابراین ابتدا به توضیح ارتباط گزاره‌های تجربی، فضای هیلبرت و ادات ربط منطقی می‌پردازیم و پس از آن با ساختن شبکه متعامد غیرپخشی بر روی مجموعه زیرفضاهای بسته هیلبرت، تحقق جبری را معرفی خواهیم کرد. با تعریف تحقق جبری، معناشناسی ادات ربط در منطق کوانتومی امکان‌پذیر خواهد شد.

۱- از جمله این چالش‌ها می‌توان به پارادوکس دو شکاف یا پارادوکس گربه شرودینگر اشاره کرد. برای بررسی بیشتر رک:

- Tonomura A. and Endo J. and Matsuda T. and Kawasaki T. and Exawa H. (1989), "Demonstration of single electron build up of an interference pattern", *Amer. J. Phys.*, Vol 57, pp 117-120.
- Schrodinger E. (1935), "Discussion of Probability relations between separated systems", *Proc. Cambridge. Phil. Soc.* Vol 31, pp 555-563.

در ادامه با تعریف تحقق کریکیایی، معنا شناسی ادات ربط منطق کوانتومی را با الهام از طرح کرییکی نیز بیان خواهیم کرد. در انتها با برقراری تناظری میان دو نوع معناشناسی بیان شده، ارتباط آنها را با جهان فیزیکی تشریح می کنیم.

۱. ارتباط فضای هیلبرت با پدیده‌های کوانتومی و ادات ربط

در طرح فون نویمان و بیرکھوف، مجموعه حالات^۱ یک سیستم کوانتومی، یا به عبارت دیگر مجموعه همه توابع موج یک سیستم که فضای فاز^۲ آن سیستم نیز نامیده می شود، معادل با یک فضای هیلبرت^۳ در نظر گرفته می شود. یعنی هر تابع موج مانند ψ که می تواند یک حالت از سیستم کوانتومی را نشان دهد، متناظر با یک بردار مانند h از فضای هیلبرت H است.

حال فرض می کنیم از n سنجش که درباره سیستم S انجام می دهیم، n نتیجه X_1, X_2, \dots یا Y_1, Y_2, \dots یا Y_n یا ... بتوانند به دست آیند. مجموعه همه n تایی هایی که می توانند به عنوان نتایج این n سنجش در نظر گرفته شوند، فضای مشاهده‌ای^۴ سیستم، و هر زیر مجموعه از این فضای مشاهده‌ای، یک گزاره تجربی نامیده می شود. بنابراین و با توجه به تناظر فضای فاز سیستم با یک فضای هیلبرت، می توان هر گزاره تجربی را معادل با یک زیر فضای بسته^۵ هیلبرت در نظر گرفت.

پس از روشن شدن ارتباط جهان فیزیکی با فضای هیلبرت، نوبت به معرفی مفاهیم منطقی و بیان ارتباط ادات ربط با این واسطه ریاضیاتی است.

۱-۱. ادات نقض

اگر p یک گزاره تجربی باشد و h_1 زیر فضای هیلبرت متناظر آن در نظر گرفته شود، زیر فضای متناظر با نقیض گزاره p ، زیر فضایی از فضای هیلبرت H است که بردارهای عضو

1 . States

2 . phase space

3 . Hilbert space

4 . observation space

5 . closed subspace

آن بر تمامی اعضای h_1 عمودند [2]. این زیرفضا را اصطلاحاً مکمل متعامد^۱ زیرفضای h_1 می‌نامیم و آن را با h_1^\perp نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$h_1^\perp = \{ x \in H; (\forall y \in h_1) x \perp y \}$$

پس، از آنجا که h_1^\perp نیز یک زیرفضای بسته فضای هیلبرت H است، می‌تواند متناظر با یک گزاره تجربی باشد که این گزاره، همان نقیض گزاره p ، یعنی $\neg p$ است. به این ترتیب صادق بودن گزاره p به این معناست که یکی از نتایج n تایی مانند x_1, x_2, \dots, x_n که در n سنجش مفروض رخ داده است، در زیرمجموعه p از فضای مشاهده‌ای موجود است و این خود به این معناست که بردار متناظر با این حالت، در زیرفضای h_1 قرار دارد. همچنین صادق بودن گزاره $\neg p$ به این معناست که هیچکدام از نتایجی که در n سنجش مفروض رخ داده است در زیر مجموعه p از فضای مشاهده‌ای قرار ندارد و این خود به این معناست که بردار متناظر با نتیجه به دست آمده، نه تنها در زیرفضای h_1 وجود ندارد، بلکه بر تمامی اعضای آن عمود است.

۱-۲. ادات عطف

در مباحث ریاضی مربوطه، به سادگی ثابت می‌شود که اشتراک دو زیرفضای بسته هیلبرت، خود یک زیرفضای بسته هیلبرت است [3]. بنابراین اگر اشتراک این دو زیرفضا را با h_3 نمایش دهیم، h_3 نیز می‌تواند معادل با یک گزاره تجربی در نظر گرفته شود. این گزاره، ترکیب عطفی دو گزاره‌ای است که معادل با زیر فضاهای h_1 و h_2 هستند. پس اگر p گزاره مربوط به h_1 و q گزاره مربوط به h_2 باشند، $p \wedge q$ گزاره متناظر با h_3 است. به این ترتیب صادق بودن $p \wedge q$ به این معناست که نتیجه n سنجش مفروض، هم در زیرمجموعه p از فضای مشاهده‌ای وجود دارد و هم در زیرمجموعه q و این خود به آن معناست که بردار متناظر با این حالت هم عضوی از زیرفضای h_1 است و هم عضوی از زیرفضای h_2 .

^۱. ortho-complement

۱-۳. ادات فصل

متناسب با آنچه درباره ادات عطف بیان شد، ابتدا به نظر می‌رسد برای معرفی ادات فصل باید اجتماع دو زیرفضای بسته را مد نظر قرار دهیم. اما ممکن است اجتماع دو زیرفضای بسته هیلبرت، یک زیرفضای بسته نباشد [3]. یعنی دیگر نمی‌توان مطمئن بود که اجتماع دو زیرفضای بسته مانند h_1 و h_2 ، معادل با یک گزاره تجربی است. بنابراین برای معرفی ادات فصل، به جای اجتماع دو زیرفضا، از سوپریم^۱ آن‌ها استفاده می‌کنیم. سوپریم دو زیرفضای بسته، کوچک‌ترین زیرفضای بسته‌ای است که شامل آن دو زیرفضا باشد و آن را با نماد $h_1 \vee h_2$ نمایش می‌دهیم. پس اگر داشته باشیم $h_4 = h_1 \vee h_2$ ، h_4 زیرفضای بسته معادل با گزاره $p \vee q$ است.

این مطلب، هسته مرکزی تفاوت منطق‌های کوانتومی و کلاسیک را تشکیل می‌دهد. زیرا ثابت می‌شود که ممکن است برداری مانند x از فضای هیلبرت H ، عضو هیچ‌یک از زیرفضاهای h_1 و h_2 نباشد، اما عضوی از سوپریم آن‌ها باشد. این خود به آن معناست که ممکن است هیچ‌یک از گزاره‌های p و q صادق نباشند اما ترکیب فصلی آن‌ها صادق باشد [4].

در صورتی که می‌دانیم در منطق کلاسیک با صادق نبودن دو گزاره، ترکیب فصلی آن‌ها نیز صادق نخواهد بود. به دلیل همین رفتار غیر کلاسیک ادات فصل در منطق کوانتومی، برخی از قواعد اساسی منطق کلاسیک، مانند قاعده پخشی نیز در منطق کوانتومی برقرار نیستند و این منطق در زمره منطق‌های غیر پخشی قرار می‌گیرد. بنابراین، خاصیت اصلی منطق کوانتومی را می‌توان به صورت سطری از جدول ارزش‌ها در حالت زیر نمایش داد:

p	q	$p \vee q$
not T & not F	not T & not F	T

¹ Supremum

باید دقت داشت که در جدول فوق، ارزش گزاره‌های p و q را کاذب در نظر نمی‌گیریم. بلکه آن را «نه صادق و نه کاذب» منظور می‌کنیم. دلیل این امر به مفهوم سرشتگی در حوزه کوانتوم مربوط می‌شود که در ادامه به این مسأله خواهیم پرداخت.

۲. سرشتگی (برهنه‌ی) ^۱ پدیده‌های کوانتومی

رایش‌باخ در سال ۱۹۴۴ و پاتنم در سال ۱۹۵۷، در مقالات جداگانه‌ای طرح منطق سه ارزشی لوکاسیویچ را برای تبیین پدیده‌های کوانتومی پیشنهاد کردند. بنابر طرح پاتنم-رایش‌باخ، گزاره‌های کوانتومی علاوه بر ارزش‌های «صادق» و «کاذب»، می‌توانند متصف به ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب» نیز باشند [5]. پس از انتشار این طرح، افرادی چون فایر‌بند و لوی ^۲ به انتقاد از آن پرداختند و بر این طرح اشکالاتی وارد کردند. از جمله اشکالات وارد شده به طرح پاتنم-رایش‌باخ این است که در حالتی که ارزش یک گزاره برای ما مشخص نیست، ناچار آن را نامعلوم یا «نه صادق و نه کاذب» می‌دانیم. پس فرقی میان منطق دو ارزشی و سه ارزشی در این زمینه نیست و مطرح کردن ارزش سوم در اینجا امری زاید و بی‌فایده است [6]. به عبارت دیگر ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب»، که پاتنم آن را ارزش صدق «میانه» ^۳ می‌نامد، فقط به جهت جهل معرفت‌شناسانه از امر واقع به میان کشیده می‌شود و چنین نیست که گزاره‌ای واقعاً دارای ارزش صدق میانه باشد. اما در جواب چنین انتقادی، پاتنم تاکید می‌کند که منظور او از ارزش صدق میانه، ارزش نامعلوم نیست. بلکه مقصود او از چنین ارزشی، دقیقاً چیزی است که گزاره را در عالم واقع و جدای از حیثیت معرفت‌شناختی، نه صادق و نه کاذب می‌داند.

در توضیح کلام پاتنم می‌توان از مفهوم برهنه‌ی یا سرشتگی در پدیده‌های کوانتومی استفاده کرد. به عنوان مثال، با استفاده از قضیه بل ^۴ مشخص می‌شود که در حالتی خاص، جهت اسپین الکترون در راستای یکی از محورهای مختصات (مانند محور Y ها)، حالتی سرشته از بالا و پایین است [7].

¹ Superposition

² Levi

³ Middle

⁴ Bell

یعنی اگر فرض کنیم:

p: جهت اسپین الکترون در راستای محور y ها به سمت بالاست.

q: جهت اسپین الکترون در راستای محور y ها به سمت پایین است.

در این حالت نه می توان گزاره p را صادق دانست و نه گزاره q را. بلکه هر کدام از این گزاره ها ارزش صدق «نه صادق و نه کاذب» را خواهند داشت و بنابراین تأکید پاتنم بر وجود ارزش صدق میانه، امری معقول به نظر می رسد. در حقیقت انگیزه فون نویمن و بیرکھوف در استفاده از فضای هیلبرتی به عنوان واسطه ریاضیاتی میان جهان کوانتومی و مفاهیم منطقی نیز تبیین همین خاصیت سرشتگی در پدیده های کوانتومی است. به عبارت دیگر آن ها باید واسطه ای ریاضیاتی را جستجو می کردند که بتواند در عین صادق نبودن دو گزاره p و q ، ترکیب آن ها را صادق بداند تا بتواند حالت سرشتگی یا برهمنهی پدیده های کوانتومی را نمایش دهد و این مهم با استفاده از سوپریمم دو زیرفضای بسته هیلبرت محقق می شود. البته چنانکه لامبرت نشان داده است [8]، با استفاده از طرح فوق ارزشگزاری های^۱ فن فراسن^۲، می توان منطق سه ارزشی پاتنم - رایشناخ در حوزه کوانتوم را به منطقی دو ارزشی تبدیل کرد. اما این مطلب به معنای کنار گذاشتن یا انکار حالتی خاص که از سرشتگی دو حالت پدید می آید نیست. در واقع منطق کوانتومی که توسط فون نویمن و بیرکھوف بنیان گذاری شده است، منطقی دو ارزشی و بر اساس وجود حالت برهمنهی میان پدیده های کوانتومی است.

۳. تعبیر ادات ربط

آنچه در بالا مطرح شد، نوعی معناشناسی شهودی ادات ربط در منطق کوانتومی است که هر چند بنیان منطق کوانتومی بر آن استوار است، نمی توان آن را به عنوان یک معناشناسی منقح و سیستماتیک در منطق کوانتومی پذیرفت. برای دستیابی به یک معناشناسی سیستماتیک در این حوزه، ابتدا لازم است مفهوم تحقق جبری معرفی شود.

1. super valuation

2. van Fraassen

۳-۱. تحقق جبری^۱

یک تحقق جبری ساختاری به صورت $A = \langle B, \vee \rangle$ است که در آن B یک شبکه متعامد و \vee یک تابع ارزش است که به هر فرمول از زبان سیستم، یک عضو از شبکه B را به عنوان «ارزش صدق» نسبت می‌دهد. یک شبکه متعامد ساختاری به صورت $B = \langle M, R, \perp, 1, 0 \rangle$ است که در آن:

M ، مجموعه‌ای است که شبکه روی آن ساخته می‌شود.

R ، یک رابطه ترتیب جزئی است، یعنی خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی را داراست.

\perp ، عملگر مکمل متعامد است.

0 ، عضو می‌نیم شبکه و 1 ، عضو ماکزیمم شبکه است.

اگر به ازای هر دو عضو مانند a و b از مجموعه M ، اینفیمم^۲ را به صورت $a \sqcap b$ و سوپریمم را به صورت $a \sqcup b$ نمایش دهیم، رابطه R باید در شرایط زیر صدق کند:

- 1) $[(a \sqcap b) R a, b] \ \& \ (\forall c \in M)[(c R a, b) \rightarrow (c R (a \sqcap b))]$
- 2) $[a, b R (a \sqcup b)] \ \& \ (\forall c \in M)[(a, b R c) \rightarrow ((a \sqcup b) R c)]$
- 3) $(\forall a \in M) (0 R a \ \& \ a R 1)$

همچنین عملگر متعامد باید در شرایط زیر صدق کند:

- 1) $a^{\perp\perp} = a$
- 2) $a R b \rightarrow b^{\perp} R a^{\perp}$
- 3) $a \sqcap a^{\perp} = 0$

می‌توان نشان داد که در چنین شبکه‌ای خاصیت پخشی وجود ندارد و از این رو این شبکه‌ها را، شبکه‌های متعامد غیر پخشی نیز می‌گویند [2]. همچنین ثابت می‌شود که می‌توان چنین شبکه‌ای را روی مجموعه تمام زیرفضاهای بسته هیلبرت بناکرد [2]. یعنی می‌توان به عنوان مثالی از شبکه‌های متعامد، ساختار زیر را معرفی کرد که در آن $C(H)$ مجموعه تمام زیرفضاهای بسته هیلبرت است: $B = \langle C(H), R, \perp, 1, 0 \rangle$.

¹. algebraic realization

². infimum

از آنجا که هر زیرفضای بسته هیلبرت، معادل با یک گزاره تجربی در نظر گرفته می‌شود، می‌توان از خواص این شبکه برای تشکیل ساختار معنایی منطق کوانتومی دو ارزشی استفاده کرد. از این پس در این مقاله منظور از شبکه متعامد B ، شبکه‌ای است که روی مجموعه $C(H)$ تعریف می‌شود.

۳-۲. صدق در منطق کوانتومی

با توجه به تعریف تحقق جبری، می‌توان درباره صدق و کذب یک گزاره سخن گفت [2]. به این نحو که اگر α فرمولی از زبان سیستم باشد، می‌گوییم α در تحقق A گزاره صادقی را بیان می‌کند اگر و تنها اگر تابع ارزش v به فرمول α عضو 1 شبکه را نسبت دهد. به عبارت دیگر داریم:

$$v(\alpha) = 1 \text{ iff } \alpha \text{ گزاره صادقی را بیان می کند.}$$

اگر تابع ارزش v در هر تحقق مفروض، به فرمول α عضو 1 شبکه را نسبت دهد، می‌گوییم α گزاره‌ای را بیان می‌کند که «صادق منطقی» است و به تحقق خاصی مربوط نمی‌شود.

۳-۳. تعبیر ادات نقض

اگر α فرمولی از زبان سیستم منطقی مورد نظر باشد، با استفاده از مطالب فوق می‌توان تعبیر ادات نقض در منطق کوانتومی را به صورت زیر بیان کرد:

$$v(-\alpha) = v^{\perp}(\alpha)$$

بنابراین تابع ارزش v ، به نقیض فرمولی مانند α از زبان سیستم، عضوی از شبکه B را نسبت می‌دهد که مکمل متعامد عضوی است که تابع ارزش v به خود α نسبت می‌دهد.

۳-۴. تعبیر ادات عطف

اگر α و β دو فرمول از زبان سیستم منطقی مورد نظر باشند، تعبیر ادات عطف به صورت زیر است:

$$v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha) \sqcap v(\beta).$$

به دیگر سخن، تابع ارزش v به ترکیب عطفی دو فرمول، عضوی از شبکه B را نسبت می‌دهد که متناظر با اینفیمم اعضایی است که تابع v به صورت جداگانه به فرمول‌های مورد نظر نسبت می‌دهد. بنابراین زمانی ترکیب عطفی دو فرمول α و β گزاره‌ای صادق را بیان می‌کند که عضو 1 شبکه متعلق به اینفیمم $v(\alpha)$ و $v(\beta)$ باشد.

۳-۵. تعبیر ادات فصل

در قسمت ۱-۳ بیان شد که رفتار ادات فصل در منطق کوانتومی، رفتاری غیر عادی است. بنابراین نمی‌توان به صورت مستقیم و با استفاده از خواص شبکه متعامد، تعبیر ادات فصل را بیان کرد. به همین جهت این رابط منطقی در ساختار نحوی منطق کوانتومی به عنوان یکی از ادات منطقی مستقل مطرح نمی‌شود، بلکه در زبان این سیستم منطقی، ادات فصل بر حسب ادات نقض و عطف تعریف شده است. البته شایان ذکر است که در برخی از تقریرات ساختار نحوی منطق کوانتومی، ادات فصل نیز جزء ادات اصلی در نظر گرفته می‌شود. اما رویکرد غالب، تعریف این رابط به عنوان یک رابط فرعی در زبان سیستم است که به صورت زیر بیان می‌شود [9]:

$$\alpha \vee \beta = df \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$$

بنابراین می‌توان تعبیر ادات فصل را به صورت زیر بیان داشت:

$$v(\alpha \vee \beta) = v^+(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = v^+(v^+(\alpha) \sqcap v^+(\beta))$$

در این مورد باید دقت داشت که هرچند ظاهر تعریف ارائه شده برای ترکیب فصلی، مشابه حالت کلاسیک قاعده دمورگان است، نمی‌توان آن را به عنوان یک عملگر کلاسیک در نظر گرفت. زیرا تعابیر عطف و نقض در این سیستم منطقی با حالت کلاسیک متفاوت است و در حقیقت تعبیر ادات فصل نیز در شبکه متعامد غیر پخشی B صورت می‌گیرد. به عبارت دیگر با این تعبیر می‌توان حالتی را بیان داشت که در آن $v(\alpha) \neq 1$ و $v(\beta) \neq 1$ ، یعنی هیچ یک از فرمول‌های α و β گزاره‌های صادقی را بیان نکنند، اما $v(\alpha \vee \beta) = 1$ که این دقیقاً همان چیزی است که در منطق کوانتومی برای تبیین خاصیت برهنه‌ی

پدیده‌های کوانتومی مورد نیاز است. برای توضیح این مطلب یادآوری می‌شود زمانی که $v(\alpha) \neq 1$ باشد، لزوماً $v^{\perp}(\alpha) = 1$ نخواهد بود (همچنین است درباره $v(\beta)$). پس $v^{\perp}(\alpha) \perp v^{\perp}(\beta)$ نیز لزوماً متناظر با عضو 1 شبکه نخواهد بود و بنابراین مکمل متعامد آن لزوماً 0 نیست و می‌تواند متناظر با عضو 1 شبکه باشد.

۳-۶. تعبیر ادات استلزام

در منطق کوانتومی، معاشناسی ادات شرط یا به تعبیر دیگر استلزام مادی، با پیچیدگی‌هایی روبروست. بنابر آنچه دالاچیرا نشان داده است [2]، شرط کافی برای آنکه $\alpha \rightarrow \beta$ در یک تحقق جبری مانند A، ادات استلزام باشد آن است که:

$$\alpha \rightarrow \beta \text{ در تحقق A صادق باشد اگر و تنها اگر } v(\alpha) \leq v(\beta).$$

اما پیچیدگی ادات استلزام در منطق کوانتومی از آنجا ناشی می‌شود که دیگر نمی‌توان مانند منطق کلاسیک، آن را با استفاده از قاعده فیلو تعریف کرد. قاعده فیلو بیان می‌کند: $\alpha \rightarrow \beta =_{df} \neg \alpha \vee \beta$.

اما در منطق کوانتومی ممکن است $\neg \alpha \vee \beta$ گزاره صادقی را معرفی کند ($v(\neg \alpha \vee \beta)$) اما در حالی که رابطه $v(\alpha) \leq v(\beta)$ برقرار نباشد. بنابراین شرط کافی فوق خدشه دار خواهد بود و ادات استلزام در سیستم منطقی مورد بحث به صورت عادی تعبیر نمی‌شود. کالمباخ، پنج تعبیر متفاوت از استلزام مادی ارائه داده است [10] که امروزه فقط یکی از آنها (تعبیر اول کالمباخ) به عنوان تعبیر ادات استلزام در منطق کوانتومی شناخته می‌شود. این تعبیر به صورت زیر است:

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = v^{\perp}(\alpha) \perp [v(\alpha) \perp v(\beta)]$$

البته هاردگری این تعبیر را پیش از کالمباخ بیان کرده و نشان داده است که این تعبیر با خواص پدیده‌های کوانتومی سازگاری دارد [11]. منطق کوانتومی که با این نوع ادات استلزام ساخته می‌شود، بسیاری از قواعد و قضایای منطق کلاسیک را نقض خواهد کرد.

هاردگری در مقاله دیگری فهرست قواعد و قضایای نقض شده در منطق کلاسیک توسط این تعبیر از ادات استلزام را بیان کرده است [12].

۴. معناشناسی کریپکیایی ادات ربط

می توان با الهام از طرحی که کریپکی برای معناشناسی منطق موجهات کلاسیک ابداع کرده است، ساختار معنایی دیگری (علاوه بر تقریر جبری) برای منطق کوانتومی تشکیل داد. بیان کریپکیایی معناشناسی منطق کوانتومی، نخستین بار توسط دیشکانت طراحی شد [13] که برای بحث درباره آن، ابتدا لازم است مفاهیم جدیدی را معرفی کنیم.

۴-۱. معرفی برخی مفاهیم مورد نیاز

۴-۱-۱. چارچوب متعامد^۱

یک چارچوب متعامد ساختاری مانند $F = \langle I, R \rangle$ است که در آن مجموعه ناتهی جهان‌ها و R رابطه دسترس پذیری دو موضعی است که روی I خاصیت بازتابی و تقارنی دارد. زمانی که جهان W_i با جهان W_j رابطه داشته باشد، می‌نویسیم: $W_i R W_j$.

۴-۱-۲. مکمل متعامد

در چارچوب متعامد F ، برای هر مجموعه از جهان‌ها مانند W که $W \subseteq I$ ، مکمل متعامد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W^\perp = \{ W_i ; (\forall W_j)[W_j \in W \rightarrow \text{not}(W_j R W_i)] \}$$

به عبارت دیگر W^\perp مجموعه همه جهان‌هایی مانند W_i است که هیچ عضوی از مجموعه W به هیچ عضوی از این مجموعه دسترسی ندارد.

^۱.orthoframe

۴-۱-۳. گزاره^۱

مجموعه W از جهان‌ها، یک گزاره از چارچوب F نامیده می‌شود اگر و تنها اگر در شرط زیر صدق کند:

$$(\forall W_i) [W_i \in W \text{ iff } (\forall W_j) (W_i R W_j \rightarrow W_j R W)]$$

به عبارت دیگر یک گزاره، مجموعه‌ای مانند W از جهان‌هاست که شامل تمام جهان‌هایی باشد که جهان‌های در دسترس آنها به W دسترسی داشته باشند و در ضمن جهان W فقط باید شامل چنین جهان‌هایی باشد.

۴-۱-۴. تحقق کریپکیایی^۲

یک تحقق کریپکیایی، ساختاری به صورت $K = \langle F, \pi, \rho \rangle$ است که در آن F یک چارچوب متعامد، π مجموعه‌ای از گزاره‌های چارچوب است که شامل \perp و \top است و ρ یک تابع ارزش است که به هر فرمول از زبان سیستم، یک گزاره از π را نسبت می‌دهد. بنابراین عبارت $W_i \in \rho(\alpha)$ ، به معنای آن است که فرمول α در جهان W_i گزاره صادقی را بیان می‌کند.

۴-۲. تعبیر ادات ربط

با استفاده از مفهوم تحقق کریپکیایی می‌توان ادات ربط منطقی را به صورت زیر تعبیر کرد:

۴-۲-۱. تعبیر ادات نقض

اگر α فرمولی از زبان سیستم باشد، ادات نقض کوانتومی در تحقق کریپکیایی K به این صورت تعبیر می‌شود: $\rho(-\alpha) = \rho^\perp(\alpha)$. به عبارت دیگر، تابع ارزش ρ به نقیض α ، گزاره‌ای از π را نسبت می‌دهد که مکمل متعامد گزاره متناظر با α است. همچنین با

¹ Proposition

² Kripkean realization

استفاده از این تعبیر می توان گفت $\neg\alpha$ در جهان W_i گزاره صادقی را بیان می کند اگر و تنها اگر α در هیچ یک از جهان هایی که به W_i دسترسی دارند گزاره صادقی را بیان نکند.

۴-۲-۲. تعبیر ادات عطف

اگر α و β دو فرمول از زبان سیستم باشند، ادات عطف کوانتومی در تحقق کریپکیایی K به این صورت تعبیر می شود: $\rho(\alpha \wedge \beta) = \rho(\alpha) \cap \rho(\beta)$. به عبارت دیگر تابع ارزش ρ به ترکیب عطفی α و β گزاره ای را نسبت می دهد که به اشتراک گزاره های متناظر به هر یک آنها به صورت جداگانه نسبت می دهد. همچنین با استفاده از این تعبیر می توان گفت $\alpha \wedge \beta$ در جهان W_i گزاره صادقی را بیان می کند اگر و تنها اگر هم α و هم β در جهان W_i گزاره های صادقی را بیان کنند.

۴-۲-۳. تعبیر ادات فصل

مشابه آنچه در قسمت ۳-۵ بیان شد، معناشناسی ادات فصل در تقریر کریپکیایی نیز نمی تواند به صورت مستقیم و مستقل از ادات نقض و عطف بیان شود. با توجه به تعریف ادات فصل در ساختار نحوی سیستم، تعبیر ادات فصل در تحقق کریپکیایی K به صورت زیر است:

$$\rho(\alpha \vee \beta) = \rho^\perp(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = \rho^\perp(\rho^\perp(\alpha) \cap \rho^\perp(\beta))$$

همچنین توضیحاتی که درباره ادات استلزام در یک تحقق جبری بیان شد، درباره یک تحقق کریپکیایی نیز صادق است. بنابراین آنچه به عنوان تعبیر ادات استلزام شناخته می شود، همان تعبیر اول کالمباخ است که برحسب تابع ارزش ρ و گزاره های متناظر با هر فرمول بیان می شود.

۵. ارتباط معناشناسی‌های جبری و کریپکیایی

می‌توان ثابت کرد که معناشناسی‌های جبری و کریپکیایی منطق کوانتومی، معادل هم هستند. در ادامه دو مورد از قضایایی را که چگونگی ارتباط این دو نوع معناشناسی را مشخص می‌کنند، بدون اثبات آن‌ها ارائه می‌دهیم [2].

- α در یک تحقق جبری مانند A ، صادق منطقی است اگر و تنها اگر در یک تحقق کریپکیایی مانند K صادق منطقی باشد. به عبارت دیگر به ازای هر تحقق جبری مانند A ، یک تحقق کریپکیایی مانند K چنان وجود دارد که اگر α در A صادق منطقی باشد، در K نیز صادق منطقی است و بالعکس.
- α در یک تحقق جبری مانند A ، یک نتیجه منطقی از مجموعه‌ای از فرمول‌ها مانند T است، اگر و تنها اگر در یک تحقق کریپکیایی مانند K یک نتیجه منطقی از مجموعه T باشد. به عبارت دیگر به ازای هر تحقق جبری مانند A ، یک تحقق کریپکیایی مانند K چنان وجود دارد که اگر α در A نتیجه منطقی مجموعه‌ای از فرمول‌ها مانند T باشد، در K نیز نتیجه منطقی T است و بالعکس.

بر این اساس، می‌توان ارتباطی میان معناشناسی جبری، معناشناسی کریپکیایی و جهان فیزیکی برقرار کرد تا تعابیر فیزیکی این معناشناسی‌ها واضح‌تر و ملموس‌تر ارائه شود.

۶. تعابیر فیزیکی در معناشناسی کریپکیایی

چنانکه در قسمت ۱ بیان شد، می‌توان تمامی حالات یک سیستم کوانتومی، یعنی کلیه توابع موجی را که می‌توانند معرف یک سیستم کوانتومی باشند، به عنوان یک فضای هیلبرت در نظر گرفت. در تحقق کریپکیایی، این فضای هیلبرت در تناظر با مجموعه اقرار می‌گیرد. به دیگر سخن هر جهان ممکن در این تقریر، یک تابع موج، و مجموعه همه جهان‌های ممکن، همان فضای فاز سیستم یا فضای هیلبرت متناظر با آن است. بنابراین زمانی که می‌گوییم α در جهان W_i گزاره صادقی را بیان می‌کند ($W_i \in \rho(\alpha)$)، به معنای این است که فرمول α نمایش دهنده حالتی متناظر با تابع موج A است. به عبارت

دیگر α گزاره‌ای را بیان می‌کند که مشخصات تابع موج A در آن صدق می‌کند و ارزش احتمالاتی رخ دادن α برابر ۱ است.

به همین ترتیب رابطه دسترس‌پذیری R که میان دو جهان مفروض مانند W_i و W_j تعریف می‌شود، به معنای این است که تابع موج A قادر به تبدیل شدن به تابع موج A در سیستم S است و چون این رابطه خاصیت تقارنی دارد، تابع A نیز می‌تواند به تابع A تبدیل شود. این قبیل تبدیلات در تابع موج، ممکن است با تغییر در دما، انرژی یا مانند آنها رخ دهد. اما اگر تابع موج A ، تحت هیچ شرایطی نتواند به A تبدیل شود، جهان W_i به W_j دسترسی نخواهد داشت. مطابق همین تعبیر فیزیکی از رابطه دسترس‌پذیری است که برای این رابطه خواص بازتابی و تقارنی الزامی هستند اما خاصیت تعدی برای آن الزامی نیست. اگر W_i به W_j و W_j به W_k دسترسی داشته باشند، لزوماً W_i به W_k دسترسی ندارد، زیرا ممکن است تابع A بتواند به تابع A ، و تابع A نیز بتواند به تابع k تبدیل شود، اما تابع A نتواند مستقیماً به تابع k تبدیل شود. از طرفی خاصیت بازتابی، یعنی دسترسی یک جهان به خودش، به این معناست که تابع موج مربوطه حالت مشخصی از سیستم را نمایش می‌دهد و تحت شرایط ثابت، این تابع نیز ثابت است یا به عبارت دیگر به خودش تبدیل می‌شود. همچنین مفهوم رابطه دسترس‌پذیری در ارتباط با فضای هیلبرتی، به این معنا خواهد بود که بردار متناظر با تابع موج A ، می‌تواند به بردار متناظر با تابع A تبدیل شود که این عمل توسط ماتریس‌های تبدیل و عملگرهای مربوطه انجام می‌شود.

با توجه به این موارد، مکمل متعامد، تعبیر فیزیکی مشخصی پیدا خواهد کرد. اگر W و W^\perp دو زیرمجموعه از کل توابع موج مربوط به یک سیستم باشند، W^\perp مکمل متعامد W است زمانی که هیچ یک از توابعی که در مجموعه W وجود دارند، با هر نوع تغییر در شرایط فیزیکی، نتوانند به هیچ یک از توابع موجی که در W^\perp وجود دارند تبدیل شوند. به این طریق تعبیر فیزیکی معناشناسی ادات نقض در تقریر کریکیایی مشخص می‌شود و به همین روش می‌توان تعبیر فیزیکی دیگر ادات ربط را نیز در این تقریر، تشریح کرد.

۷. نتیجه گیری

تعبیر ادات ربط در منطق کوانتومی، بر مبنای دو تقریر جبری و کریپکیایی انجام می شود. در تقریر جبری، با تشکیل یک شبکه متعامد بر روی مجموعه همه زیرفضاهای بسته هیلبرت، می توان ادات ربط را تعبیر کرد. در این حالت، ساختاری به نام تحقق جبری که متشکل از یک شبکه متعامد و یک تابع ارزش است برای تعبیر ادات ربط به کار گرفته می شود که تابع ارزش آن به نقیض یک گزاره، مکمل متعامد آن، و به ترکیب عطفی دو گزاره، اینفیمم توابع متناظر با آنها را نسبت می دهد. در تقریر کریپکیایی نیز با تشکیل ساختار تحقق کریپکیایی، نقیض یک گزاره، مکمل متعامد آن، و ترکیب عطفی دو گزاره، اشتراک توابع نظیر آن دو گزاره معرفی، و سایر ادات ربط بر حسب ادات نقض و عطف تعبیر می شوند. هر چند این دو تقریر به صورت یک تکنیک در معناشناسی ادات ربط منطق کوانتومی مورد استفاده قرار می گیرند، دارای تعابیر فیزیکی و متناسب با عالم خارج نیز هستند. مبدا این تعابیر فیزیکی، در نظر گرفتن مجموعه همه حالات یا توابع موج سیستم، به عنوان فضای هیلبرت (در تحقق جبری) و مجموعه همه جهان های ممکن (در تحقق کریپکیایی) است. معادل دانستن هر تابع موج از یک سیستم با یک بردار در فضای هیلبرت یا یک جهان ممکن، راه را برای تعبیر ادات ربط منطق کوانتومی هموار می کند.

۸. منابع

[1] Birkhoff G. and von Neumann J. "The Logic of Quantum Mechanics", *Annals of Mechanics*, No 37, 1936, PP 823, 843.

[2] Dalla Chiara L. and Giuntini R. , "Quantum Logic", in *Hand Book of Philosophical Logic*, Vol 6, by D.M. Gabbay and F.Guenther (ed), Kluwer Acadmic Publishers, 2000.

[3] Engesser K. and Gabbay D.M. and Lehmann D. , *A New Approach to Quantum Logic*, College Publications, 2000.

[4] Aerts D. and Hondt E.D. and Gabora L. , "Why the Logical Disjunction in Quantum Logic is Not Classical", *Foundations of physics*, vol 30, No 9, 2000, pp 1473-1480.

- [5] Putnam H. , "Three- Valued Logic", *Philosophical studies* , No 3 , 1957, pp 73-80.
- [6] Feyerabend P. , "Reichenbach's Interpretation of Quantum Mechanics", *Philosophical Studies*, No 4 , 1958, pp 49-59.
- [7] Greenstein G. and Zajonc A. , *The Quantum challenges*, Jones and Bartlett publishers, 1997.
- [8] Lambert K. , "Logical Truth and Microphysics ", in *Free Logic (Selected Essays)*, Cambridge University Press, 2004
- [9] Nishimura H. , "Proof Theory for Minimal Quantum Logic . I ", *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 33, 1994, PP 103-113.
- [10] Kalmbach G. , *Orthomodular Lattice* , New York, Academic Press, 1983.
- [11] Hardegree G. M. , "Stalnaker Conditionals and Quantum Logic", *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 29 , No 4, 1975, pp 399-42.
- [12] Hardegree G. M. , "The conditional Quantum Logic" , in *Logic and Probability in Quantum Mechanics*, by P. Suppes (ed), Dordrecht: Reidel , 1976, pp 55-72.
- [13] Dishkant H. , "Semantics of the Minimal Logic of Quantum Mechanics" , *Studia Logica*, vol 30 , 1972, pp17-29.