

## **Theoretical formulation and numerical simulation of 1D Fresnel diffraction from a phase step with two different kinds of material on sides of step in reflection mode**

**A. Motazedifard<sup>1</sup>**  
**M.T. Tavassoly<sup>2</sup>**

Received: 2012.12.3

Accepted: 2013.1.28

### **Abstract**

*When a plane wavefront of a monochromatic and semi coherent is incident on a step, the reflected beam of light diffracted from the step because of the abrupt changes in the amplitude and phase of wave at the boundary of the step therefore fringes pattern is formed in perpendicular of propagation of light that can be described by Fresnel- Kirchhoff integrals. Recently numerous applications of this kind of Fresnel diffraction have been investigated including measurement of thickness of thin films by accuracy of nanometers, accurate measurement of refractive index of solids and liquids, determination of dispersion relation of materials, measurement of nanometer displacement and measurement of wavelength by angstrom accuracy. In this report we will show that when two sides of a phase step which its boundary is perpendicular to the plane of incidence are two different materials, the intensity distribution in the fringes pattern of diffraction from a step is a function of optical constants of materials and height of the step. Numerical simulations of this case indicates that by having the intensity distribution of fringes pattern in several incident angles for polarized beam of light parallel or normal to the plane of incident we can determine optical constants of materials of both sides of step and its height. These simulations are performed for*

---

<sup>1</sup> M. Sc. Student, Department of Physics, University of Tehran,  
alimotazedifard@ut.ac.ir

<sup>2</sup> Professor of Physics, University of Tehran

مجله فیزیک کاربردی دانشگاه الزهراء (س)

شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۱

## فرمول بندی و شبیه سازی پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در بازتاب با دو جنس متفاوت در دو طرف پله فازی

علی معتضدی فرد<sup>۱</sup>

محمد تقی توسلی<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۹۱/۹/۱۳

تاریخ تصویب: ۹۱/۱۱/۹

### چکیده

هنگامی که یک جبهه موج تخت، تکفام و شبه همدوس بر پله ای بتابد؛ به دلیل تغییرات ناگهانی دامنه و فاز در مرز پله، نور بازتابیده پراشیده می شود و فریزهایی تشکیل می گردد که به کمک انتگرال فرنل - کیرشیهف قابل توصیف می باشد. اخیراً این نوع پراش کاربردهای متعددی پیدا کرده است، از جمله در اندازه گیری ضخامت لایه های نازک با دقت چندنانومتر، محاسبه ضریب شکست مایعات و جامدات با دقت بالا، تعیین پاشندگی مواد، اندازه گیری جابجایی با دقت نانومتر و تعیین طول موج با دقت کسری از نانومتر. در این گزارش نشان داده می شود که وقتی دو طرف پله

---

<sup>۱</sup>. دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه تهران؛ alimotazedifard@ut.ac.ir

<sup>۲</sup>. استاد فیزیک، دانشگاه تهران

فازی که مرز آن عمود بر صفحه تابش نور می‌باشد از دو ماده مختلف است توزیع شدت در نقش پراش به ثابت های اپتیکی دو ماده و ارتفاع پله بستگی دارد. شبیه سازی مسئله نشان می دهد که با داشتن توزیع شدت در نقش پراش در چند زاویه فرود برای نور قطبیده موازی با صفحه فرود و یا عمود بر آن می توان ثابت های اپتیکی لایه های دو طرف پله و ارتفاع پله را به دست آورد. شبیه سازی برای مواردی که دو ماده یکی دی الکتریک و دیگری رسانا، هر دو رسانا و یا هر دو دی الکتریک باشند انجام گرفته است. کارهای تجربی مقدماتی و اندازه گیری های انجام شده با نظریه و شبیه سازی ها همخوانی دارند.

## واژه های کلیدی: پراش فرنل، پله فازی، اندازه گیری، لایه

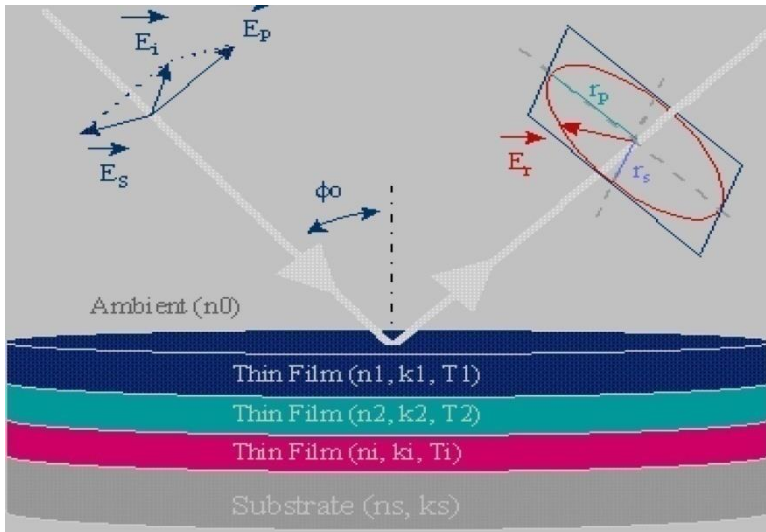
نازک، ثابت های اپتیکی، بیضی سنجی.

### ۱- مقدمه

ضریب شکست و ضریب جذب یکی از مهمترین ویژگی های اپتیکی مواد می باشند که کاربردهای متعددی در زمینه های مختلف از جمله آنالیز مواد، تعیین میزان ناخالصی در مایعات، ساخت عدسی و آینه های لیزر، فیلتر، تفسیر داده های طیف سنجی، صنایع میکروالکترونیک و غیره دارند. بنابراین تعیین دقیق این کمیت ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. از این رو محققین به دنبال روش های مختلفی برای اندازه گیری دقیق ضریب شکست و ضریب جذب می باشند که از آن جمله می توان به اندازه گیری ثابت های اپتیکی به کمک تداخل سنج هتروداین [۱] و بیضی سنجی [۲] اشاره کرد.

بیضی سنجی روشی متداول و دقیق برای تعیین ثابت های اپتیکی و ضخامت لایه های نازک می باشد. اساس کار بیضی سنج ها اندازه گیری حالت قطبیدگی نور در بازتاب، عبور و یا پراکندگی از سطح نمونه مورد آزمایش می باشد. هنگامی که نوری با قطبش خطی مشخص به سطح مورد آزمایش می تابد در بازتاب از سطح به دلیل اختلاف فاز بین قطبش

عمود بر صفحه فرود و موازی با آن با یکدیگر، نور بازتابی به شکل بیضوی قطبیده می شود و با تحلیل بیضوی می توان میزان تغییر حالت قطبیدگی نور را مشخص کرده (شکل ۱) از روی پارامترهای بیضی ثابت های اپتیکی و ضخامت لایه نازک مورد آزمایش را با دقت بالا تعیین کرد [۲].

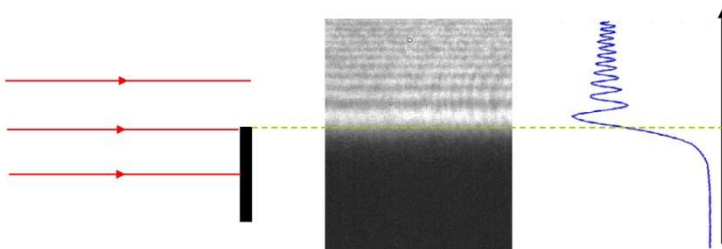


شکل ۱- طرحواره از نحوه تحلیل در بیضی سنجی [۲و۳]

از مزایای بیضی سنجی می توان به غیرمخرب و غیر تماسی بودن آن اشاره کرد. در بیضی سنجی می توان لایه هایی از حدود ضخامت چند آنگستروم تا حدود میکرون را تحلیل کرد همچنین سطوح با چندین لایه متفاوت در بیضی سنجی قابل تحلیل می باشند. از محدودیت های بیضی سنجی این است که جواب های به دست آمده در آن یکتا نیستند و لازم است اطلاعات اولیه در مورد نوع ترکیب شیمیایی، حدود ضخامت و حدود ثابت های اپتیکی لایه مورد نظر را دانست تا با تفسیر جواب های به دست آمده، پاسخ درست را انتخاب کرد. علاوه بر این محدوده کار بیضی سنجی ها به گستره آنگستروم تا میکرون محدود می باشد. همچنین تحلیل لایه های فلزی مخصوصاً لایه هایی با ضخامت اندک (به

گونه‌ای که نور از آنها عبور کند) برای تعیین ضخامت و لایه‌های فلزی خالص و غیر اکسید بسیار مشکل بوده نیاز به تفسیرهای پیچیده دارد [۳ و ۲].

بعد از آن که مایکلسون در سال ۱۸۸۱ تداخل سنج خود را معرفی کرد بسیاری از حواس‌ها معطوف به کاربردهای تداخل سنجی در اندازه‌گیری شد زیرا تداخل سنج مایکلسون امکان تغییر فاز را به صورت خطی به هر میزان دلخواه میسر می‌ساخت. پراش نیز شامل پراش فرانیهوفر، پراش میدان دور و پراش فرنل می‌باشد. پراش فرانیهوفر کاربردهای متعددی در طیف سنجی و تحلیل سیستم‌های اپتیکی دارد. پراش فرنل به صورت متداول زمانی رخ می‌دهد که مانعی در بخشی از مسیر نور قرار گیرد. در این حالت در واقع دامنه میدان در مرز مانع دچار تغییرات ناگهانی می‌شود [۴] (شکل ۲). به دلیل آن که در پراش فرنل فاز و یا اختلاف راه به صورت غیر خطی تغییر می‌کند بنابراین تغییر اختلاف راه به میزان دلخواه برخلاف تداخل سنجی به سادگی امکان پذیر نیست. از این رو کاربردهای پراش فرنل تا به حال محدود مانده بیشتر جنبه آموزشی دارد.



شکل ۲- طرحواره پراش فرنل از لبه‌ی جسم کُدر [۴]

در سال ۲۰۰۹ محمدتقی توسلی و همکارانش نشان دادند که تغییرات تند و ناگهانی در فاز جبهه موج منجر به نوعی پراش فرنل می‌شود که فریزهای طرح پراش به کمک انتگرال‌های فرنل-کیرشهف قابل توجیه می‌باشد [۵]. آنها با معرفی پله فازی و به کمک تغییر زاویه فرود نور توانستند اختلاف راه نوری را به میزان دلخواه تغییر دهند که البته این خود مزیتی نسبت به تداخل سنجی محسوب می‌شود زیرا میزان تغییرات اختلاف راه در مقایسه با تداخل سنجی ظریف‌تر و ساده‌تر می‌باشد. بدین ترتیب آنها توانستند نشان دهند

که تغییرات اختلاف راه نوری در پراش سنجی هم مانند تداخل سنجی می تواند کاربردهای مختلفی در سنجه شناسی داشته باشد [۶و۵] که از آن جمله می توان به اندازه گیری ضخامت لایه های نازک با دقت چند نانومتر [۷]، اندازه گیری ضریب شکست جامدات و مایعات با دقت بالا [۹و۸]، پاشندگی [۱۰]، اندازه گیری طول موج با دقت صدم نانومتر [۱۱]، اندازه گیری جابجایی با دقت نانومتر [۱۲]، بررسی تکنیکی فازی و کاربردهای پراش فرنل در اجسام فازی [۱۳]، تعدیل طیف [۱۴]، نمایه دمایی در اطراف اجسام گرم [۱۵] و غیره اشاره کرد. منظور از پله فازی، هر نوع تغییر تند در ضخامت، ثابت های اپتیکی و یا هر عامل دیگری است که منجر به تغییرات ناگهانی در فاز جبهه موج شود.

## ۲- فرمول بندی پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در بازتاب با دو جنس متفاوت در دو طرف پله فازی

مطابق شکل (۳) هنگامی که یک جبهه موج تخت همدوس و تکفام بر مرز پله فازی که دو طرف آن لایه هایی از جنس های متفاوت است بتابد، نور بازتابیده به دلیل تغییرات ناگهانی دامنه و فاز میدان در مرز پله، پراشیده می شود و فریزهایی ایجاد می گردد که به کمک انتگرال های فرنل- کیرشهف قابل توجیه می باشند. در این حالت توزیع شدت در نقش پراش به ثابت های اپتیکی و ضخامت لایه های نازک در دو طرف پله بستگی دارد. لازم به ذکر است که در محاسبات فرض کرده ایم: ۱- مرز پله عمود بر صفحه فرود می باشد و ۲- از انتقال الکترون های آزاد و اثر تونل زنی میان دو ماده در دو طرف مرز پله فازی صرف نظر کرده ایم. در کارهای بعدی برای محاسبه تجربی ثابت های اپتیکی، انرژی فرمی در فلزات، همدوسی طولی و عرضی و شکل خط طیف از این دو موضوع استفاده می کنیم. روابط برداری زیر از شکل (۳) به سادگی قابل دست یابی می باشند:

$$\vec{r}'_1 = \vec{R}' - \vec{x}_1 \quad (1)$$

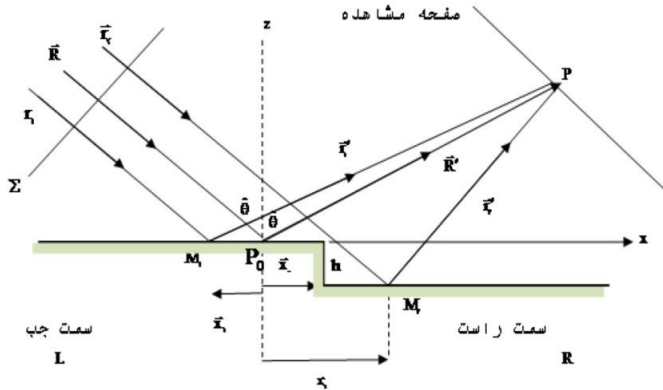
$$\vec{r}'_2 = \vec{R}' - \vec{x}_2 - \vec{h} \quad (2)$$

$$r_1 = R - x_1 \sin \theta_i \quad (3)$$

$$r_2 = R + x_2 \sin \theta_i + h \cos \theta_i \quad (4)$$

۱۰ / فرمول‌بندی و شبیه‌سازی پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در بازتاب با دو جنس متفاوت ...

که در آن  $r_1$  و  $r_2$  به ترتیب فاصله نقاط در دو طرف پله تا نقطه مشاهده،  $R$  و  $R'$  به ترتیب فاصله چشمه تا مبدأ مختصات  $P_0$  و فاصله مبدأ تا نقطه مشاهده  $P$  می‌باشند.  $X_1$  و  $X_2$  نیز فاصله نقاط در دو طرف پله تا مبدأ مختصات را نشان می‌دهند.



شکل ۳- شمای کلی پراش از پله فازی با دو جنس متفاوت وقتی مبدأ مختصات  $(p_0)$  سمت چپ پله می‌باشد.  $p$  نقطه مشاهده،  $x_0$  فاصله مبدأ از لبه پله،  $\theta$  زاویه فرود نور،  $X_1$  فاصله مبدأ تا هر نقطه روی پله سمت چپ مبدأ،  $X_2$  فاصله هر نقطه سمت راست مبدأ تا مبدأ مختصات و  $h$  ارتفاع پله است. سمت چپ ماده‌ای با ضریب شکست مختلط  $\tilde{n}_L$  و سمت راست ماده‌ای با ضریب شکست  $\tilde{n}_R$  می‌باشد.

اگر اندازه بردارها را حساب کنیم با فرض این که از ارتفاع پله نسبت به فاصله منبع تا نقطه مشاهده صرف نظر کنیم با تقریب خواهیم داشت:

$$(r_1 + r_1') \cong (R + R') + \frac{x_1^2}{2R'} \quad (5)$$

$$(r_2 + r_2') \cong (R + R') + \frac{x_2^2}{2R'} + 2h \cos \theta_i \quad (6)$$

فرض می‌کنیم لایه‌های سمت چپ و راست پله در حالت کلی دارای ضریب شکست مختلط می‌باشند. بنابراین بازتاب آن‌ها دارای دامنه و فاز می‌باشد (روابط ۷ و ۸)،

$$\tilde{r}_L = r_L e^{i\varphi_L} \quad (7)$$

$$\tilde{r}_R = r_R e^{i\varphi_R} \quad (8)$$

بدین ترتیب دامنه میدان پراشیده در نقطه مشاهده P با استفاده از انتگرال فرنل-کیرشهف و با صرف نظر کردن از اثر سایه پله فیزیکی که در مورد پله های با ارتفاع کمتر از چند میکرون قابل صرف نظر کردن است به صورت زیر در می آید (در حالتی که مرز موازی صفحه فرود باشد این سایه وجود ندارد که این در برخی از کاربردها مفید است ولی یک جابجایی در مبدأ هنگام انتگرال گیری ایجاد می شود که در تعیین میزان طول همدوسی کاربرد دارد):

$$u_L(p) = A \sqrt{\frac{-i}{\lambda}} \left[ \tilde{r}_L \int_{-\infty}^{x_0} e^{ikr_1} \frac{e^{ikr'_1}}{r'_1} dx_1 + \tilde{r}_R \int_{x_0}^{\infty} e^{ikr_2} \frac{e^{ikr'_2}}{r'_2} dx_2 \right] \quad (9)$$

که  $k$  عدد موج است. برای ساده سازی پارامترهای زیر را تعریف می کنیم:

$$v_i = x_i \sqrt{\frac{2}{\lambda R'}} \quad i = 0, 1, 2 \quad (10)$$

$$u_0 = A e^{i\varphi_L} e^{ik(R+R')} \quad (11)$$

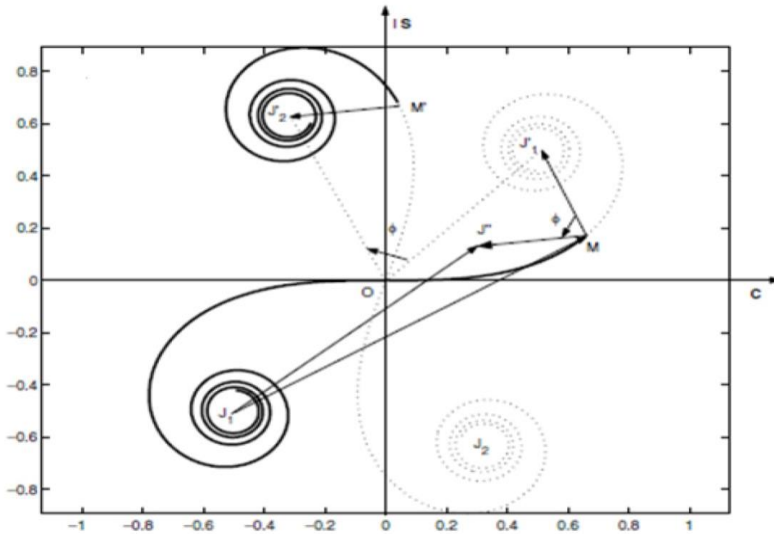
$$\varphi = 2kh \cos \theta_i + (\varphi_R - \varphi_L) \quad (12)$$

که  $v_0$  فاصله نرمالیزه از لبه پله،  $u_0$  دامنه اولیه میدان و  $\varphi$  فاز می باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$u_L(p) = u_0 \left[ r_L \int_{-\infty}^{v_0} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv + r_R e^{i\varphi} \int_{v_0}^{\infty} e^{i\frac{\pi v^2}{2}} dv \right] \quad (13)$$

اگر بخواهیم دامنه میدان پراشیده (رابطه (۱۳)) را در فضای مختلط و با توجه به توابع فرنل و ماریچ کورنو توصیف کنیم، باید بگوییم که اثر فاز  $\varphi$  در جمله دوم این است که در فضای مختلط، ماریچ کورنوی متناظر با جزء دوم در رابطه (۱۳) به اندازه زاویه  $\varphi$  در جهت دایره مثلثاتی نسبت به ماریچ کورنوی متناظر با جزء اول، چرخیده است [۶] (شکل ۴).





شکل ۴- مارپیچ کورنو برای تفسیر دامنه میدان پراشیده از لبه پله فازی با دو جنس متفاوت باز نگاری شده از [۶]

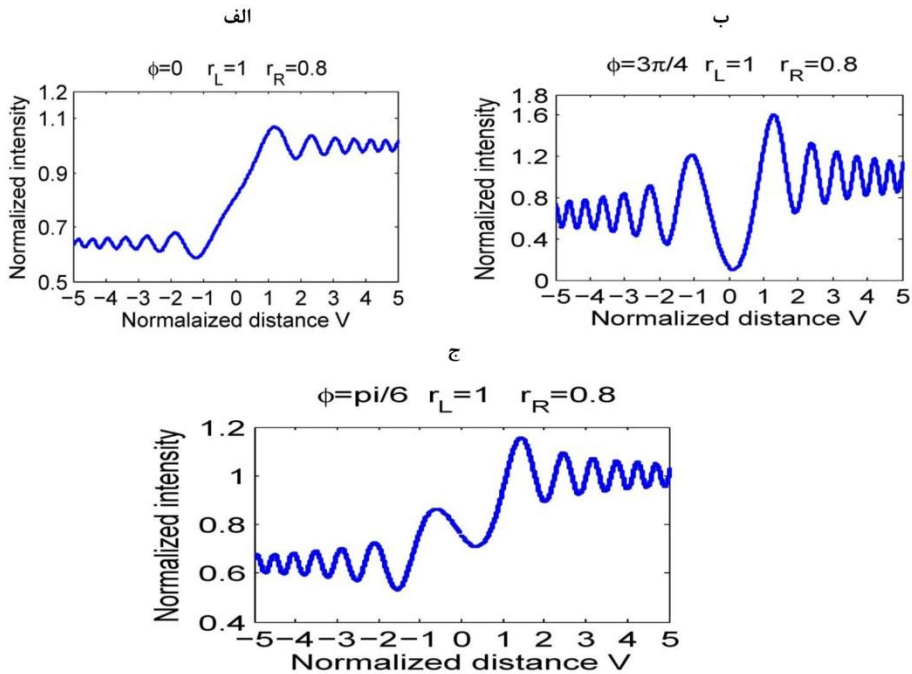
شدت پراشیده نرمالیزه  $\frac{I_L(p)}{I_0}$  هنگامی که مبدأ مختصات ( $P_0$ ) سمت چپ پله باشد به صورت زیر می‌باشد:

$$I_{n,L}(p) = \{r_L r_R [\cos \varphi (0.5 - (C_0^2 + S_0^2)) - \sin \varphi (C_0 - S_0)] + \frac{1}{2} [(0.5 + (C_0^2 + S_0^2))(r_L^2 + r_R^2) + (C_0 + S_0)(r_L^2 - r_R^2)]\} \quad (14)$$

که در آن  $C_0$  و  $S_0$  توابع فرنل می‌باشند (رابطه ۱۵)

$$C_0 + i S_0 = \int_0^{v_0} e^{i \frac{\pi v^2}{2}} dv \quad (15)$$

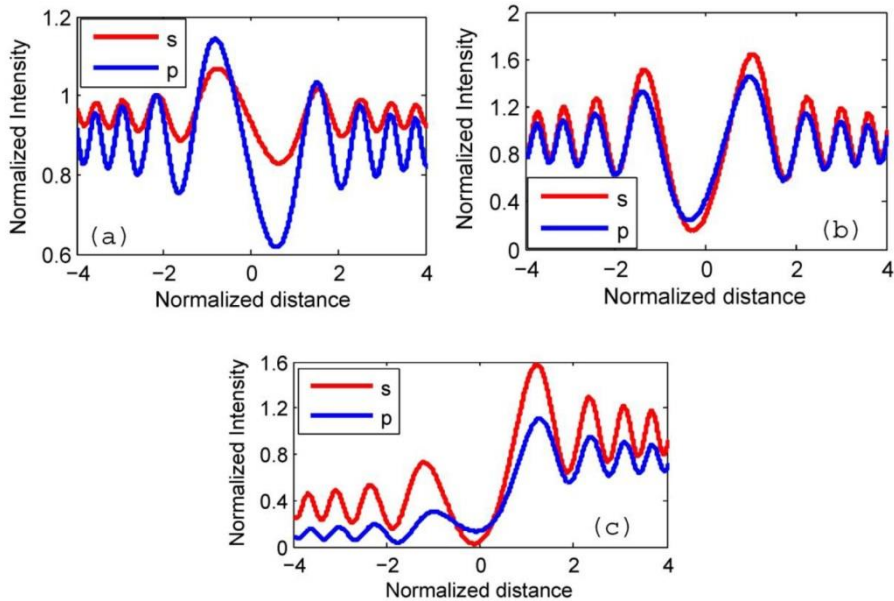
در این حالت  $v_0 \in [0, \infty)$  و دارای مقداری مثبت می‌باشد. در حالتیکه مبدأ مختصات سمت راست پله باشد شدت دارای همین رابطه می‌باشد با این تفاوت که  $v_0$  دارای مقداری منفی می‌باشد. در شکل (۵) نمودار توزیع شدت نرمالیزه بر حسب فاصله نرمالیزه از لبه پله به ازای  $r_L = 1$ ,  $r_R = 0.8$  مستقل از جنس مواد، قطبش و زاویه فرود نور در سه فاز مختلف رسم شده است.



شکل ۵- توزیع شدت نرمالیزه بر حسب فاصله نرمالیزه از لبه پله به ازای  $r_L = 1$ ,  $r_R = 0.8$

الف)  $\phi = 0$  ب)  $\phi = \frac{3\pi}{4}$  ج)  $\phi = \frac{\pi}{6}$

در شکل (۶) نمودار توزیع شدت نرمالیزه بر حسب فاصله نرمالیزه از لبه پله برای پله‌های «آلومینیوم-طلا» و «آلومینیوم-منیزیوم فلوراید» روی زیر لایه از جنس شیشه BK7 در بازتاب در زوایای فرود مختلف برای طول موج زرد سدیم (۵۸۹,۳ نانومتر) رسم شده است.



شکل ۶- نمودار توزیع شدت نرمالیزه بر حسب فاصله نرمالیزه از لبه پله فازی. رنگ قرمز برای قطبش s و آبی برای قطبش p. الف) سمت چپ پله آلومینیوم و سمت راست طلا بدون ارتفاع در زاویه ۵۰ درجه برای قطبش s و p ب) سمت چپ پله آلومینیوم و سمت راست طلا با ارتفاع  $\lambda/2$  در زاویه ۵۰ درجه برای قطبش s و p ج) سمت چپ پله آلومینیوم و سمت راست منیزیم فلوراید بدون ارتفاع در زاویه ۷۵ درجه برای قطبش s و p

### ۳- شبیه‌سازی یا حل معکوس مسئله و یافتن پارامترهای اپتیکی و ضخامت لایه‌های نازک

همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع شدت در نقش پراش به ثابت‌های اپتیکی و ضخامت لایه‌های نازک در دو طرف پله بستگی دارد (رابطه ۱۴). از این رو می‌خواهیم به کمک شبیه‌سازی نشان دهیم با داشتن توزیع شدت نقش پراش در زاویه فرود معین، برای نور قطبیده موازی با صفحه فرود و یا عمود بر آن ثابت‌های اپتیکی و ضخامت لایه‌های دو طرف پله به دست می‌آید. به علاوه با اندازه‌گیری توزیع شدت در چند زاویه فرود دقت اندازه‌گیری به طور قابل ملاحظه‌ای بالا می‌رود. شبیه‌سازی را برای حالتی که دو ماده

یکی دی الکتریک و دیگری رسانا، هر دو رسانا و یا هردو دی الکتریک باشند انجام می دهیم.

فرآیند حل مسئله به این ترتیب است که نمودار توزیع شدت در یک زاویه و قطبش مشخص را دانسته می گیریم. سپس رابطه تئوری را که برای شدت به دست آورده ایم (رابطه ۱۴) به منحنی توزیع شدت برازش می کنیم و با یافتن ضرایب برازش، مقدار ضریب بازتاب هریک از لایه های سمت چپ و راست و مقدار فاز  $\varphi$  را محاسبه می کنیم. آنگاه از طریق حل همزمان روابط ۱۶ تا ۱۹ (که ارتباط ضرایب بازتاب در قطبش های موازی (p) و عمود (s) بر صفحه فرود و فاز را با ضرایب شکست و جذب لایه ها و ضخامت آن ها نشان می دهد [۱۶])، ثابت های اپتیکی لایه ها و ضخامت را به دست می آوریم.

$$r_{12s} = \sqrt{\frac{(n_1 \cos \theta_i - u_2)^2 + v_2^2}{(n_1 \cos \theta_i + u_2)^2 + v_2^2}} \quad (16)$$

$$\varphi_{12s} = \tan^{-1} \left[ \frac{2v_2 n_1 \cos \theta_i}{u_2^2 + v_2^2 - n_1^2 \cos^2 \theta_i} \right] \quad (17)$$

$$r_{12p} = \sqrt{\frac{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i - n_1 u_2]^2 + [2k_2 n_2 \cos \theta_i - n_1 v_2]^2}{[(n_2^2 - k_2^2) \cos \theta_i + n_1 u_2]^2 + [2k_2 n_2 \cos \theta_i + n_1 v_2]^2}} \quad (18)$$

$$\varphi_{12p} = \tan^{-1} \left[ 2n_1 \cos \theta_i \frac{2k_2 n_2 u_2 - (n_2^2 - k_2^2)v_2}{(n_2^2 + k_2^2)^2 \cos^2 \theta_i - n_1^2 (u_2^2 + v_2^2)} \right] \quad (19)$$

که در آن  $\theta_i$  زاویه فرود نور می باشد و نور از محیط ۱ با ضریب شکست  $n_1$  وارد محیط ۲ با ضریب شکست مختلط  $n_2 = n_2 + ik_2$  می شود.  $u_2$  و  $v_2$  توابع حقیقی و مثبت و به صورت زیر تعریف می شوند [۱۶]:

$$u_2 + iv_2 = n_2 + n_1 \sin 2\theta_i \quad (20)$$

از رابطه (۲۱) برای برازش به منحنی توزیع شدت استفاده می کنیم:

$$I_{n,L}(v_0) = \alpha_1 C(v_0) + \alpha_2 S(v_0) + \alpha_3 (C^2(v_0) + S^2(v_0)) + \alpha_5 \quad (21)$$

که در آن رابطه ضرایب تطبیق  $\alpha_i$  با مقادیر فاز و ضرایب بازتاب از مقایسه با رابطه (۱۴) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\alpha_1 = -I_0 r_L r_R \sin\varphi + \frac{I_0}{2} (r_L^2 - r_R^2) \quad (22)$$

$$\alpha_2 = I_0 r_L r_R \sin\varphi + \frac{I_0}{2} (r_L^2 - r_R^2) \quad (23)$$

$$\alpha_3 = -I_0 r_L r_R \cos\varphi + \frac{I_0}{2} (r_L^2 + r_R^2) \quad (24)$$

$$\alpha_5 = \frac{I_0}{2} r_L r_R \cos\varphi + \frac{I_0}{4} (r_L^2 + r_R^2) \quad (25)$$

از حل همزمان معادلات ۲۲ الی ۲۵ می‌توان فاز  $\varphi$  و ضرایب بازتاب  $r_L$  و  $r_R$  را همراه خطای آن‌ها به دست آورد. سپس با توجه به روابط ۱۶ تا ۱۹ ضرایب شکست و جذب و ضخامت را تعیین کرد. در ادامه حالات مختلف شبیه سازی را برای نور زرد سدیم بررسی می‌کنیم.

### ۳-۱- دو فلز هم ارتفاع در دو طرف پله فازی

در این حالت فرض می‌کنیم سمت چپ پله فازی Al و سمت راست آن Cu می‌باشد که روی زیرلایه از جنس شیشه BK7، لایه نشانی شده اند (شکل ۷). وقتی نور از پشت شیشه بر مرز پله بتابد، دو فلز هم ارتفاع اند؛ یعنی  $h=0$  می‌باشد. فرض می‌کنیم منحنی شدت برای قطبش عمود بر صفحه فرود و موازی آن را برای زوایای ۵۰ و ۷۵ درجه داریم و مسئله را حل می‌کنیم. برازش به کمک نرم افزار MATLAB [۱۷] انجام گرفته است که نتایج آن نیز در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است که در آن  $\varphi^{S \text{ or } P, \text{ fit}}$  فاز به دست آمده برای قطبش S یا P از روی برازش،  $\varphi^{S \text{ or } P, \text{ theory}}$  فاز تئوری برای قطبش S یا P،  $R^{R \text{ or } L, \text{ fit or theory}}$  یا  $p$  بازتابندگی در حالت قطبش S و یا P برای سمت چپ و یا راست در حالت برازش و یا نظری می‌باشد.



شکل ۷- پله فازی با دو لایه فلزی در دو طرف آن. سمت چپ آلومینیوم و سمت راست مس روی زیر لایه از جنس شیشه BK7. جهت تابش نور با فلش مشخص شده است.

جدول ۱- فاز و ضرایب بازتاب برای دو لایه فلزی در دو طرف آن بدون ارتفاع

$\theta$	$s, \text{fit}\Phi$	$s, \text{theory}\Phi$	$p, \text{fit}\Phi$	$p, \text{theory}\Phi$
$50^\circ$	0.3496	0.3511	0.8241	0.8274
$75^\circ$	0.1380	0.1386	0.9607	0.9627

$\theta$	$R_L^s, t$	$R_L^p, f$	$R_L^p, t$	$R_R^p, t$	$R_R^s, f$	$R_R^s, t$	$R_R^p, f$	$R_R^p, t$
$50^\circ$	0.9225	0.8259	0.8243	0.6853	0.8468	0.8486	0.6815	0.6853
$75^\circ$	0.9683	0.7235	0.7214	0.7463	0.9377	0.9384	0.7414	0.7463

نتایج مربوط به ضرایب شکست و جذب همراه خطای به دست آمده از برازش در جدول (۲) آمده است.

جدول ۲- مقادیر مربوط به ضرایب شکست و جذب و خطای آن‌ها برای پله فازی

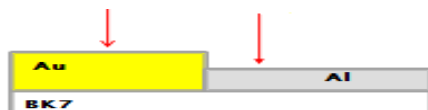
با دو لایه فلزی بدون ارتفاع در دو طرف آن

	$n_{Al}$	$k_{Al}$	$n_{Cu}$	$k_{Cu}$
میانگین گیری	1.1637	7.2383	0.4844	2.8231
خطای برازش	0.0163	0.0516	0.0069	0.0093
مقدار تئوری	1.16	7.2	0.47	2.81

۱۸ / فرمول‌بندی و شبیه‌سازی پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در بازتاب با دو جنس متفاوت ...

### ۳-۲ دو فلز در دو طرف پله فازی با ارتفاع مشخص

در این حالت فرض می‌کنیم نور زرد سدیم از هوا به مرز پله فازی می‌تابد که سمت چپ آن Al با ارتفاع h قرار دارد و سمت راست آن Cu می‌باشد که در این شبیه‌سازی  $z=0.5$  در نظر گرفته می‌شود (شکل ۸) که در آن  $z=h/\lambda$  می‌باشد. شبیه‌سازی در ۳ زاویه ۲۵ و ۵۰ و ۶۵ صورت گرفته است. نتایج شبیه‌سازی در جداول (۳) و (۴) آمده است.



شکل ۸- پله فازی با دو لایه فلزی در دو طرف آن. سمت چپ آلومینیوم و سمت راست مس با ارتفاع نسبی  $z=0.5$ ، روی زیر لایه از جنس شیشه BK7.

جدول ۳- فاز و ضرایب بازتاب

$\theta$	$\Phi_s, \text{fit}$	$\Phi_p, \text{theory}$	$\Phi_p, \text{fit}$	$\Phi_s, \text{theory}$
25°	6.0538	6.1361	6.1350	6.0545
50°	4.2961	4.6420	4.6463	4.2912
65°	2.8188	3.4591	3.4628	2.8203

$\theta$	$R_L^s, f$	$R_L^s, t$	$R_L^p, f$	$R_L^p, t$	$R_R^s, f$	$R_R^s, t$	$R_R^p, f$	$R_R^p, t$
25°	0.9239	0.9254	0.9086	0.9097	0.8319	0.8306	0.7958	0.7948
50°	0.9359	0.9467	0.8674	0.8763	0.8773	0.8793	0.7393	0.7383

نتایج مربوط به ضرایب شکست، جذب و ضخامت همراه خطای به دست آمده از برازش در جدول (۴) آمده است.

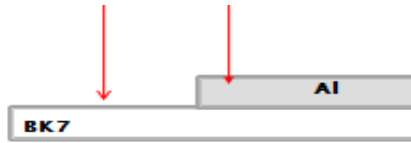
جدول ۴- مقادیر مربوط به ضرایب شکست، جذب و ارتفاع به همراه خطای آن‌ها

برای پله فازی با دو لایه فلزی در دو طرف آن با ارتفاع نسبی z

	$n_{Al}$	$k_{Al}$	$n_{Cu}$	$k_{Cu}$	Z
میانگین‌گیری از برازش	1.1949	7.2462	0.4805	2.8118	0.4998
خطا	0.0178	0.0491	0.0156	0.0171	$1.8 \times 10^{-4}$
تئوری	1.16	7.2	0.47	2.81	0.5

### ۳-۳- فلز و دی الکتریک در دوطرف پله با ارتفاع مشخص

در این حالت نور از هوا به مرز پله فازی می‌تابد که سمت چپ آن Al با ارتفاع h و سمت راست آن دی الکتریک BK7 می‌باشد (شکل ۹). شبیه سازی برای حالت  $z=0.5$  و در دو زاویه ۳۰ و ۷۰ درجه انجام گرفته است. نتایج مربوط به شبیه سازی و برازش در جدول‌های (۵) و (۶) آمده است.



شکل ۹- پله فازی که سمت چپ آلومینیوم با ارتفاع h و سمت راست BK7 می‌باشد

جدول ۵- فاز و ضرایب بازتاب برای پله با دو لایه فلزی و دی الکتریک

$\theta$	$\Phi_s, \text{fit}$	$\Phi_s, \text{theory}$	$\Phi_p, \text{fit}$	$\Phi_p, \text{theory}$
$30^\circ$	<b>8.3603</b>	<b>8.3500</b>	<b>5.1174</b>	<b>5.1304</b>
$75^\circ$	<b>4.7029</b>	<b>4.6983</b>	<b>3.8168</b>	<b>3.7927</b>

$\theta$	$R_L^s, f$	$R_L^s, t$	$R_L^p, f$	$R_L^p, t$	$R_R^s, f$	$R_R^s, t$	$R_R^p, f$	$R_R^p, t$
$30^\circ$	<b>0.9247</b>	<b>0.9286</b>	<b>0.9007</b>	<b>0.9057</b>	<b>0.0589</b>	<b>0.0605</b>	<b>0.0280</b>	<b>0.0267</b>
$75^\circ$	<b>0.9699</b>	<b>0.9782</b>	<b>0.7572</b>	<b>0.7630</b>	<b>0.4080</b>	<b>0.4062</b>	<b>0.1055</b>	<b>0.1058</b>

در یافتن جواب‌ها باید به این نکته توجه کرد که چون نور از هوا به دی الکتریک تابیده در حالت بازتاب خارجی هستیم، بنابراین در حل معادلات ابتدا حدود زاویه بروستر و ضریب شکست دی الکتریک را به کمک معادله‌های بازتابندگی می‌یابیم. سپس با توجه به این که قبل یا بعد از زاویه بروستر هستیم، فاز مورد نظر را برای دی الکتریک انتخاب و دوباره معادلات را برای فاز و بازتابندگی و یا ترکیب‌های مختلف حل می‌کنیم. نتایج مربوط به ضرایب شکست، جذب و ضخامت همراه خطای حاصل از برازش در جدول (۶) آمده است.



۲۰ / فرمول‌بندی و شبیه‌سازی پراش فرنل از پله فازی یک بعدی در بازتاب با دو جنس متفاوت ...

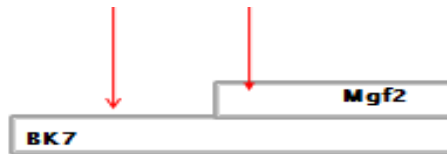
جدول ۶- ضرایب شکست، جذب و ارتفاع برای پله فازی با لایه‌های فازی و دی‌الکتریک

در دو طرف آن با ارتفاع نسبی  $z$

	$n_{Al}$	$k_{Al}$	$n_{BK7}/n_{air}$	$z$
میانگین از برازش	1.1922	7.2783	1.5173	0.5005
خطای برازش	0.1160	0.2807	0.0106	0.0036
مقدار تنوری	1.16	7.2	1.516	0.5

### ۳-۴- دو دی‌الکتریک در دو طرف پله با ارتفاع $h$

در این مرحله به شبیه‌سازی حالتی می‌پردازیم که دو دی‌الکتریک با ارتفاع  $h$  در دو طرف پله فازی قرار دارند. مطابق شکل (۱۰) نور زرد سدیم از هوا به مرز پله ای می‌تابد که سمت چپ آن MgF2 به ارتفاع  $h=0.75\lambda$  و سمت راست آن شیشه BK7 است. شبیه‌سازی برای ۳ زاویه ۳۵ و ۷۵ و ۸۵ درجه انجام گرفته است. نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های (۷) و (۸) آمده است.



شکل ۱۰- شمای کلی پله فازی با دو لایه دی‌الکتریک با ارتفاع نسبی  $z$

جدول ۷- فاز و ضرایب بازتاب برای پله با دو لایه دی‌الکتریک با ارتفاع نسبی  $z$

$\theta$	$s, \text{fit}\Phi$	$s\Phi \Delta$	$p, \text{fit}\Phi$	$p\Phi \Delta$
35°	7.7171	$\pm 0.0209$	7.7173	$\pm 0.0621$
75°	2.4341	$\pm 0.0054$	2.4359	$\pm 0.0053$
85°	0.8200	$.0030 \pm$	0.8196	$\pm 0.0028$

$\theta$	$R_L^s, r$	$\Delta R_L^s, r$	$R_L^p, r$	$\Delta R_L^p, r$	$R_R^s, r$	$\Delta R_R^s, r$	$R_R^p, r$	$\Delta R_R^p, r$
35°	0.0443	$\pm 2.8 \times 10^{-4}$	0.0118	$\pm 6.4 \times 10^{-4}$	0.0685	$\pm 2.8 \times 10^{-4}$	0.0211	$\pm 6.4 \times 10^{-4}$
75°	0.3396	$\pm 2.3 \times 10^{-4}$	0.1106	$\pm 6.6 \times 10^{-4}$	0.4016	$\pm 2.3 \times 10^{-4}$	0.1046	$\pm 6.6 \times 10^{-4}$

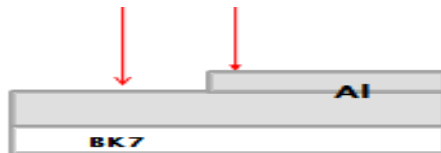
نتایج مربوط به ضرایب شکست و ضخامت همراه خطای به دست آمده از برآزش در جدول (۸) آمده است.

جدول ۸- ضرایب شکست و ارتفاع برای پله فازی با دو دی الکتریک در دو طرف آن با ارتفاع  $0.75\lambda$

	$n_{BK7}$	$n_{Mgf2}$	Z
میانگین گیری از برآزش	1.5098	1.3791	0.7495
خطای فیت	$\pm 0.0105$	$\pm 0.0016$	$\pm 0.0071$
مقدار تئوری	1.516	1.38	0.75

### ۳-۵- پله فازی با دو جنس یکسان فلزی

در این حالت فرض می کنیم دو طرف پله فازی آلومینیوم با ارتفاع  $h=0.5\lambda$  باشد (شکل ۱۱). در واقع روی زیر لایه از جنس شیشه BK7 لایه آلومینیوم نشانده روی آن پله ایجاد شده است. شبیه سازی برای ۳ زاویه ۴۰، ۵۰ و ۶۵ درجه انجام گرفته که نتایج آن در جدول (۹) آمده است.



شکل ۱۱- پله فازی با دو جنس آلومینیوم در دو طرف پله به ارتفاع  $0.5\lambda$

جدول ۹- فاز برای پله با جنس یکسان

$\theta$	fit $\Phi$	theory $\Phi$
65°	2.6523	2.6554
40°	4.8171	4.8132
50°	4.0434	4.0388

در این حالت فاز به صورت  $\varphi = 2\frac{2\pi}{\lambda} h \cos\theta_i$  می باشد، بنابراین ارتفاع به دست آمده

برابر است با

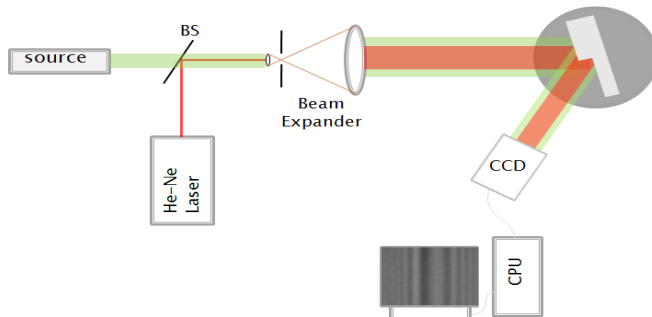
$$\frac{h}{\lambda} = 0.50027 \pm 4.33 \times 10^{-5}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی برای ضریب شکست، ضریب جذب و ضخامت لایه‌های دو طرف پله در حالات مختلف، توافق خوبی با مقادیر تئوری مفروض برای آن‌ها دارد بنابراین در تجربه نیز باید بتوان از روی برازش توزیع شدت در نقش پراش همچون شبیه‌سازی، پارامترهای اپتیکی و ضخامت را به دست آورد.

## ۴- کارهای تجربی

### ۴-۱- شرح آزمایش و کارهای مقدماتی تجربی

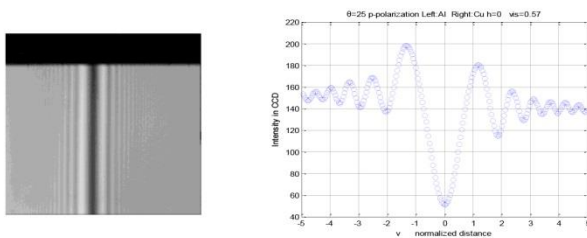
در روش معرفی شده در بخش شبیه‌سازی و فرمول‌بندی ارائه شده؛ به کمک فرآیندهای لایه‌نشانی و لیتوگرافی پله‌های مختلفی ایجاد کردیم تا حالت‌های مطرح شده در شبیه‌سازی را به طور تجربی نیز بررسی کنیم. چیدمان تجربی مورد استفاده در این آزمایش به این صورت است که منبع گسترده نور (برای مثال لامپ سدیم) و یا لیزر توسط پین هول پالایه فضایی می‌شود. در صورت نیاز به قطبیده بودن نور، از منشور نیکل برای قطبش استفاده می‌شود. سپس توسط عدسی موازی شده و به پله فازی مورد آزمایش که روی گونیومتر با دقت ۱ دقیقه قرار دارد می‌تابد، در بازتاب از پله فازی طرح پراش توسط CCD ۸ بیتی ثبت شده (محور عمودی مربوط به شدت از ۰ تا ۲۵۵ تقسیم‌بندی می‌شود) و در کامپیوتر توسط نرم افزار MATLAB شدت سنجی و تحلیل می‌شود (شکل ۱۲). با چرخاندن گونیومتر در زوایای مختلف طرح پراش را برای نور قطبیده موازی با صفحه فرود و عمود بر آن ثبت می‌کنیم.



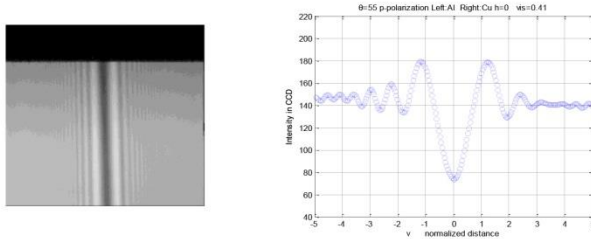
شکل ۱۲- چیدمان تجربی مورد استفاده در آزمایش

از آنجا که در این روش با توزیع شدت کار می‌کنیم باید دقت شود نورهای مربوط به منابع اضافی موجود در آزمایش از نقش پراش حذف شوند سپس شدت سنجی و برازش انجام شود. در شکل های زیر توزیع شدت همراه نقش پراش برای پله های متفاوت از جنس آلومینیوم - طلا، آلومینیوم- مس و منیزیم فلوراید- شیشه نشان داده شده است (شکل های ۱۳ تا ۱۵).

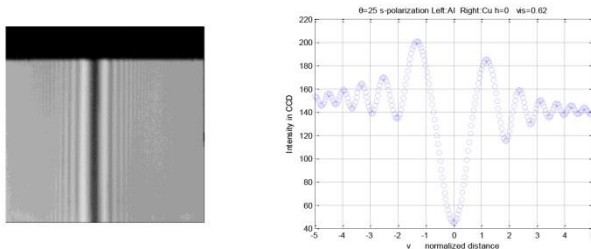
الف



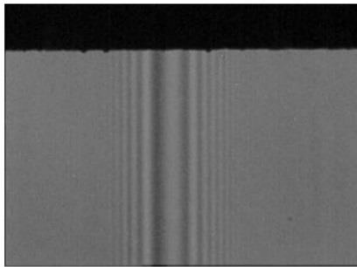
ب



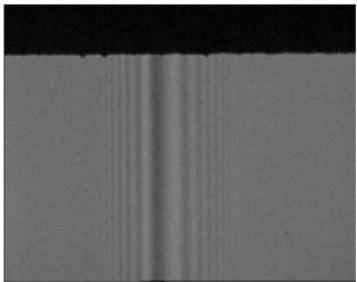
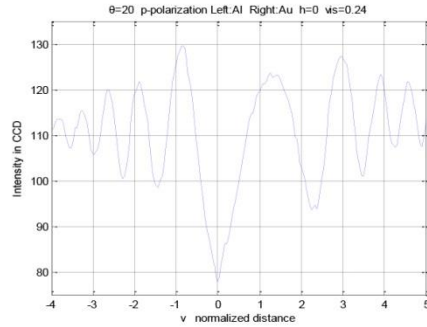
ج



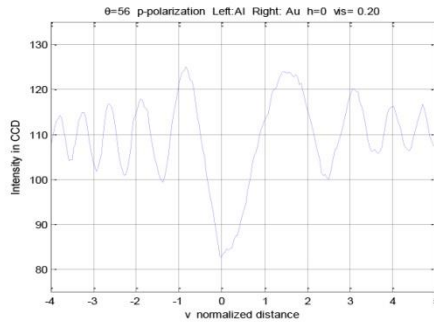
شکل ۱۳- توزیع شدت بر حسب فاصله نرمالیزه برای پله فازی که سمت چپ آن آلومینیوم و سمت راست آن مس با ارتفاع یکسان می‌باشد. الف) در زاویه فرود ۲۵ درجه برای قطبش p، با نمایانی ۰٫۵۷، ب) در زاویه فرود ۵۵ درجه برای قطبش p، با نمایانی ۰٫۴۱، ج) در زاویه فرود ۲۵ درجه برای قطبش s، با نمایانی ۰٫۶۲. محور عمودی شدت در CCD است که از صفر تا ۲۵۵ تقسیم‌بندی شده است و محور افقی فاصله نرمالیزه از لبه فازی می‌باشد.



الف

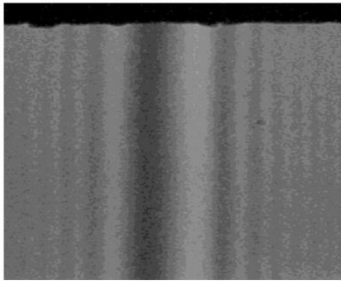


ب

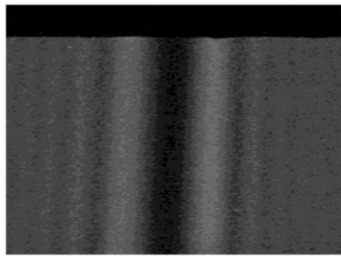
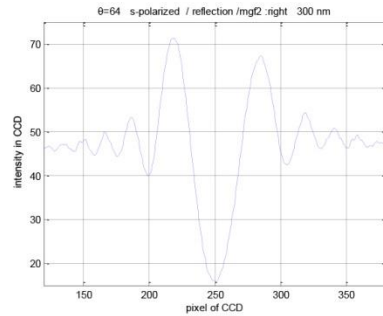


شکل ۱۴- توزیع شدت برحسب فاصله نرمالیزه در قطبش **p** برای پله فازی که سمت چپ آلومینیوم و سمت راست طلا و هم ارتفاع می‌باشند. الف) زاویه فرود ۲۰ درجه و نمایانی ۰,۲۴ ب) زاویه فرود ۵۶ درجه و نمایانی ۰,۲۰. محور عمودی شدت در CCD است که از صفر تا ۲۵۵ تقسیم‌بندی شده است و محور افقی فاصله نرمالیزه از لبه فازی می‌باشد.

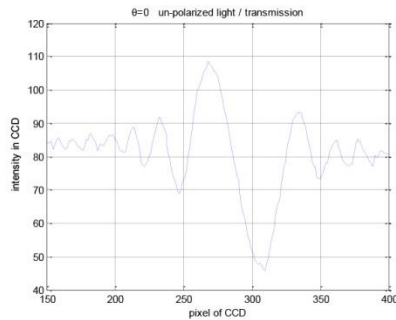
برای بررسی پله از جنس دی‌الکتریک روی زیرلایه از جنس شیشه، لایه منیزیوم فلوراید را با ضخامت‌های مختلف نشانده سپس به کمک لیتوگرافی پله ایجاد می‌کنیم. در شکل ۱۵ طرح پراش همراه نمودار توزیع شدت این پله‌ها را مشاهده می‌شود.



الف



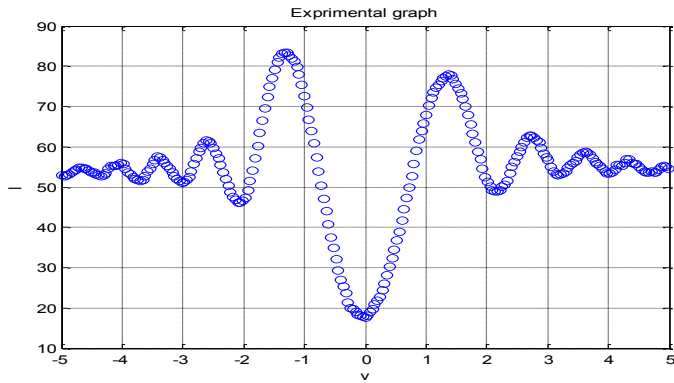
ب



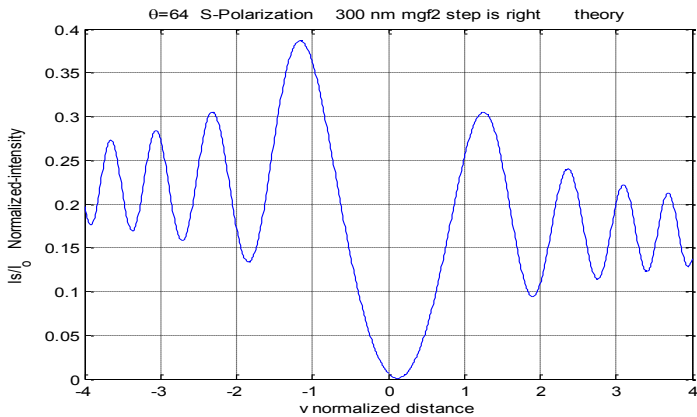
شکل ۱۵- نمودار توزیع شدت بر حسب پیکسل های CCD برای پله فازی که سمت چپ شیشه و سمت راست  $MgF_2$  می باشد. الف) پله ۴۰۰ نانومتر در عبور برای فرود عمود و نور غیر قطبی ب) پله ۳۰۰ نانومتر در بازتاب تحت زاویه فرود ۶۴ درجه در قطبش s. محور عمودی شدت در CCD است که از صفر تا ۲۵۵ تقسیم بندی شده است.

در شکل (۱۶) یک نمونه مقایسه نمودار نظری و تجربی را برای پله ۳۰۰ نانومتر منیزیوم فلوراید-BK7 در بازتاب تحت زاویه ۶۴ درجه می بینید. علت تفاوت این است که در فرآیند لیتوگرافی و لایه نشانی واقعا نمی دانیم که ارتفاع پله ۳۰۰ نانومتر است یا بیشتر و یا کمتر. همچنین زیر لایه ما از جنس شیشه معمولی به جای BK7 است (تئوری) که ناخالصی آن نسبت به BK7 خیلی زیاد است. از این رو کیفیت طرح پراش پایین آمده علاوه بر این ضریب شکست آن را هم نمی دانیم؛ در واقع این موارد سبب شدند که نمودار تجربی و نظری کاملاً بر هم منطبق نباشند ولی با این وجود همخوانی خوبی دارند. بقیه نمودارهای تجربی که در شکل های قبل آورده شدند نیز به همین ترتیب با نمودارهای نظری همخوانی دارند.

### الف



### ب



شکل ۱۶- مقایسه توزیع شدت برحسب فاصله نرمالیزه برای پل  $Mgf_2$  به ارتفاع  $300$  نانومتر روی شیشه در بازتاب تحت زاویه فرود  $64$  درجه برای قطبش s. الف) نمودار تجربی برای شیشه معمولی. ب) نمودار نظری برای شیشه BK7.

بنابراین با توجه به شکل ۱۶ می‌توان گفت که روش برازش برای یافتن پارامترهای اپتیکی و ضخامت لایه‌های نازک روش مناسبی است.

### ۵- نتیجه‌گیری

فرمول بندی کلی پراش فرنل از پله فازی با دو جنس متفاوت ارائه شده در این گزارش (در تقریبی که از اثر سایه هندسی پله در حالی که مرز عمود بر صفحه فرود باشد صرف نظر

شده است) نشان می‌دهد که پراش فرنل از پله‌های فازی می‌تواند کاربردهای فراوانی در سنج‌شناسی به خصوص اندازه‌گیری دقیق ثابت‌های اپتیکی و ضخامت داشته باشد. روش استفاده از کل منحنی توزیع شدت به جای نمایانی که در این گزارش بر آن تکیه شده روش ساده‌تری نسبت به روش نمایانی می‌باشد. همچنین با وسایل و تجهیزات معمولی می‌توان ضخامت را با دقت چند نانومتر به دست آورد و محدودیتی در ارتفاع پله وجود ندارد. علاوه بر این روش استفاده از کل منحنی توزیع شدت و برازش این امکان را می‌دهد که در پله‌های با جنس متفاوت با برازش منحنی نظری به منحنی تجربی، ثابت‌های اپتیکی لایه‌های دو طرف پله را به دست آورد (در این حالت روش استفاده نمایانی هیچ اطلاعات مفیدی نمی‌دهد [۷ تا ۷]). مزیت این روش نسبت به بیضی‌سنجی که اساس کار آن تحلیل حالت قطبیدگی نور برای اندازه‌گیری ثابت‌های اپتیکی و ضخامت می‌باشد؛ سادگی، هزینه کم، دقت بالا و محدوده وسیع کاری آن می‌باشد.

با استفاده از CCDهای دقیق‌تر و ایجاد پله‌هایی با تیزی بالاتر و یکنواختی بیشتر و همچنین بالا بردن کیفیت لایه‌نشانی و استفاده از ماسک‌های دقیق‌تر در فرآیند لیتوگرافی برای ایجاد پله می‌توان دقت را به میزان قابل ملاحظه‌ای بالا برد و دقت اندازه‌گیری را به مقدار تئوری قابل انتظار از شبیه‌سازی نزدیک‌تر کرد.

## ۶- سپاسگزاری

از دوست و همکار عزیز جناب آقای نوید فرحی در دانشگاه تهران کمال تشکر را داریم. علاوه بر این از همکاری مرکز اپتیک و مرکز میکروالکترونیک جهاد دانشگاهی صنعتی شریف در فرآیندهای لایه‌نشانی و لیتوگرافی صمیمانه سپاسگزاریم.



## ۷- منابع

- [1] J.J. Chieh, S.Y. Yang, H.E. Horng, C.Y. Hong, and H.C. Yang, "Measurements of the Complex Transmission/Reflection Coefficient of a Material Using Mixed-Type Common-Path Heterodyne Interferometry", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **58**, NO. 6 (2009) 1878 - 1885.
- [2] R.M.A. Azzam and N.M. Bashara, "Ellipsometry and Polarized Light", North-Holland Company publishing (1977).
- [3] J. Jung, J. Bork, T. Holmgaard, N.A. Kortbek, and K. Pedersen, "Ellipsometry", Aalborg University, Institute of Physics and Nanotechnology (2004).
- [4] N. Farahi, A. Motazed Fard, S. R. Hosseini and M. Taghi Tavassoly, "Fresnel diffraction by abrupt change of amplitude, phase, coherency and polarization", Winter College on Optics in Imaging Science, miramare-trieste-italy (2011).
- [5] M. T. Tavassoly, M. Amiri, A. Darudi, R. Aalipour, A. Saber, and A.R. Moradi, "Optical diffractometry," *J. Opt. Soc. Am. A* **26** (2009) 540-547.
- [6] M. Amiri and M.T. Tavassoly, "Fresnel diffraction from 1D and 2D phase steps in reflection and transmission modes," *Optics Communications* **272** (2007) 349-361.
- [7] M. Taghi Tavassoly, I. Moaddel Haghghi, and K. Hassani, "Application of Fresnel diffraction from a phase step to the measurement of film thickness," *Appl. Opt.* **48** (2009) 5497-5501.
- [8] M. Taghi Tavassoly and A. Saber, "Optical Refractometry Based on Fresnel Diffraction from a Phase Wedge," *Opt. Lett.* **35** (2010) 3679-3681.
- [9] M. Taghi Tavassoly, R. Rezvani Naraghi, A. Nahal and K. Hassani, "High precision refractometry based on Fresnel diffraction from phase plates", *Opt. Lett.* **37**, No. 9 (2012) 1493-1495.
- [۱۰] رکسانا رضوانی، محمد تقی توسلی، آرشمید نهال، "شکست سنجی دقیق با استفاده از تیغه فازی"، رساله کارشناسی ارشد دانشگاه تهران (۱۳۹۰).
- [11] M. Taghi Tavassoly, S.R. Hosseini, A. Motazed Fard, and R. Rezvani Naraghi, "Applications of Fresnel diffraction from the edge of a transparent plate in transmission," *Appl. Opt.* **51**, No. 30 (2012) 7170-7175.

[۱۲] محمدتقی توسلی، خسرو حسنی، علی اکبر خورشاد، "اندازه گیری جابجایی های زیر میکرومتری با استفاده از پراش فرنل از پله فازی دو بعدی"، مقاله نامه کنفرانس فیزیک ایران (۱۳۹۰).

[13] M.T. Tavassoly, A. Darudi, H.R. Khalesifard, and S.M.R. Sadat Hosseini, "Applications of Fresnel diffraction from phase objects," *SPIE the International Society for Optical Engineering* **4399** (2001) 98-106.

[14] M.T. Tavassoly, M. Amiri, E. Karimi, and H.R. Khalesifard, "Spectral modification by line singularity in Fresnel diffraction from 1D phase step," *Optics Communications* **255** (2005) 23-34.

[15] R. Aalipour, M. Taghi Tavassoly, and A. Drrudi, "Superimposing the waves diffracted from two similar hot and cold wires provides the temperature profile around the hot one", *Appl. Opt.* **49** No. 22 (2010) 3768-3773.

[16] M. Born, E. Wolf, and A. B. Bhatia, "Principles of Optics", Pergamon Press (1975).

[17] T. C. Poon and T. Kim, "Engineering Optics with MATLAB", World Scientific Publishing, (2006).