

Investigation of exchange interaction effect on the high frequency magneto-impedance of thin wires

N. Ansari¹

Received: 2015.5.23
Accepted: 2015.11.24

Abstract

Magnetic layers composed of soft ferromagnetic alloys as novel magnetic materials have been attracted great attention in recent years. These materials are suitable candidates for application in electronic circuits especially those operating at high frequency microelectronics elements and magnetic field sensors. In this paper, electronic transport properties of thin conductive magnetic wires made of soft magnetic materials with cylindrical geometry toward analysis of the high frequency magnetoimpedance (MI) effect will be studied. The system is studied with applied current in the microwave frequency range and the wire is magnetically saturated longitudinally. Our aim is solving simultaneously the Maxwell and Landau-Lifshitz equations of a narrow wire in cylindrical coordinate with a boundary condition. The main focus will be on investigation of the exchange interaction term on the MI response. This effect results in resonance and anti-resonance spin wave dynamics and additionally to the spin wave propagation in such structures. Finally, based on the optimized parameters, the MI response will be quantified for application in magnetic field sensors and microelectronics elements.

Keywords: Magneto-impedance, Exchange interaction, Landau-Lifshitz equation, Soft magnetic materials.

¹ Assistant Professor of Physics, Alzahra University, n.ansari@alzahra.ac.ir

بررسی برهمکنش تبادل‌ی بر امیدانس مغناطیسی فرکانس بالا در سیم‌های نازک

نرگس انصاری^۱

تاریخ دریافت: ۹۴/۳/۲

تاریخ تصویب: ۹۴/۹/۳

چکیده

امروزه لایه‌های مغناطیسی، ترکیبی از آلیاژهای مواد مغناطیسی نرم، به عنوان دسته جدیدی از مواد مغناطیسی اهمیت زیادی یافته‌اند. این مواد کاندیدای خوبی برای استفاده در مدارهای الکترونیکی به ویژه در فرکانس‌های بالا و نیز برای استفاده به عنوان حسگرهای مغناطیسی هستند. در این مقاله، مطالعه خواص ترابرد لایه‌های مغناطیسی سیم‌رسانا متشکل از مواد مغناطیسی نرم با هندسه استوانه‌ای و تحلیل اثر امیدانس مغناطیسی آن‌ها مد نظر می‌باشد. هدف، حل معادلات موج ماکسول و لاندائو-لیفشیتز در مختصات استوانه‌ای و بررسی معادلات دینامیکی مغناطش ساختارهای

مغناطیسی فوق، تحت میدان‌های متناوب با فرکانس مایکروویو و میدان مغناطیسی یکنواخت در حد اشباع ماده می‌باشد. به ویژه تمرکز بر وارد نمودن ثابت بر همکنشِ تبدالی بر امپدانسِ مغناطیسی است که باعث ایجاد امواج اسپینی در دو حالت تشدید و پادتشدید علاوه بر امواج الکترومغناطیس در این ساختارها می‌شود. در نهایت، با استفاده از پارامترهای مؤثر در امپدانسِ مغناطیسی، پاسخ ماده برای استفاده در مدارهای الکترونیکی و حسگرهای میدان مغناطیسی بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: امپدانسِ مغناطیسی، معادله لاندائو-لیفشیتز، ثابتِ تبدالی، موادِ مغناطیسی نرم.

۱. مقدمه

با اولین مشاهدات تجربی در سال ۱۹۹۴، مطالعه اثر امپدانس مغناطیسی^۱ به عنوان عاملی مهم در زمینه تراپرد مغناطیسی آغاز شد [۱ و ۲]. توصیف این پدیده به درک عمیق خواص مواد مغناطیسی نرم نیاز دارد که به نوبه خود وابسته به دینامیک مغناطیسی است. با رشد سریع گروه‌های تحقیقاتی که در تمامی دنیا به مطالعه امپدانس مغناطیسی و کاربردهای تکنولوژی آن پرداختند، این اثر شاخه جدیدی از تحقیقات را گشود که تلفیقی از میکرومغناطیس مگنت‌های نرم با الکترو دینامیک کلاسیک بود. از دیدگاه کاربردی، اکنون بازه وسیعی از انواع گوناگون حسگرهای مغناطیسی به بازار عرضه شده‌اند. انتظار می‌رود در سال‌های آتی، بر اساس تداخل کوانتومی ابررساناها بتوان به حساسیتی در حسگرها، همراه با مزیت قابل رقابت از بُعد قیمت و عملکرد در دمای اتاق، دست یافت. مطابق با مقالات چاپ شده [۲ و ۳] حساسیت حسگر امپدانس مغناطیسی به 10^{-12} تسلا رسیده است.

^۱ Magnetoimpedance (MI)

با عبور جریان متناوب با فرکانس بالا از رسانا، در صورت ایجاد اثر پوسته $(\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}})$ ، این جریان در بخشی از سطح مقطع این رسانا حرکت می‌کند. در صورتی که رسانا از مواد مغناطیسی باشد، با اعمال همزمان میدان مغناطیسی به این نمونه، سطح مقطع جریان ارسالی و در نتیجه امپدانس آن تغییر می‌کند. امپدانس مغناطیسی تابعی از فرکانس جریان، نفوذپذیری مغناطیسی ماده، رسانش الکتریکی ماده و میدان مغناطیسی اعمال شده است. با داشتن یک ماده انتخابی، پارامتر قابل کنترل در آزمایش شامل فرکانس و میدان وارد شده است اما مواردی چون نفوذپذیری مغناطیسی و رسانش الکتریکی را می‌توان به جنس، شکل و هندسه ماده و عوامل اثرگذار دیگر همچون دما و میدان وابسته دانست.

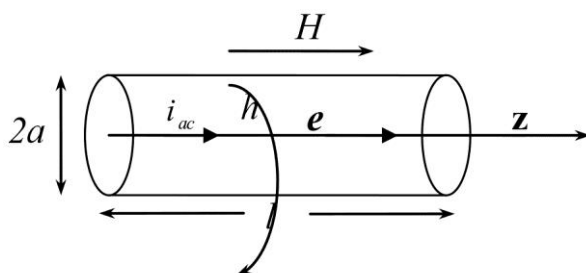
امپدانس مغناطیسی در فرکانس‌های واقع در بازه کیلوهرتز تا مگاهرتز تابعی از رفتار حوزه‌های مغناطیسی می‌باشد و می‌توان آن را همانند نفوذپذیری مغناطیسی با نوشتن انرژی آزاد سیستم و یافتن زاویه تعادلی حوزه‌ها در هر نقطه از میدان اعمال شده به دست آورد. اما در فرکانس‌های بالاتر، چند صد مگاهرتز تا گیگاهرتز، به علت رفتار مگنتودینامیکی سیستم و انتشار امواج مگنونی، علاوه بر محاسبات فوق بایستی از معادله لاندائو-لیفشیتز^۱، دینامیک مغناطش را به دست آورد و به کمک آن نفوذپذیری و امپدانس ساختار را تعیین کرد. نظر به اهمیت ویژه امپدانس مغناطیسی سیم‌های نازک مغناطیسی در میکروالکترونیک، در این مقاله نحوه محاسبه امپدانس مغناطیسی در هندسه استوانه‌ای محاسبه می‌شود. با مطالعه این پدیده در فرکانس‌های بالا می‌توان تشدید فرومغناطیسی به وجود آمده در این مواد را همزمان بررسی کرد.

برای یافتن کامل MI، لازم است همزمان معادلات ماکسول و معادله حرکت لاندائو-لیفشیتز حل شود. همزمان با معادلات ماکسول استفاده از قانون اهم $(\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E})$ و معادلات ماده (رابطه میان شدت میدان مغناطیسی B و میدان مغناطیسی H $(\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M})$ ، ضروری است. ترکیب این معادلات ما را به رابطه پاشندگی در بر دارنده پاسخ کلی بردارهای امواج منتشر شونده راهنمایی می‌کند؛ با این معادلات می‌توان امپدانس یا اطلاعات فیزیکی دیگری را نشان داد.

¹ Landau -Lifshitz

۲. نظریه

نمونه فرومغناطیس استوانه‌ای در میدان مغناطیسی یکنواخت H_0 موازی با محور استوانه قرار دارد (شکل ۱) و فرض می‌شود که طول نمونه l در مقایسه با قطر استوانه $2a$ بسیار بزرگتر باشد $l \gg 2a$ ، تا بتوان با استفاده از این فرض از میدان و امغناطش طولی صرف نظر کرد. میدان الکتریکی سینوسی e با فرکانس زاویه‌ای $\omega = 2\pi f$ بر روی نمونه اثر می‌کند که باعث ایجاد جریان ac طولی در راستای محور Z می‌شود و یک میدان مغناطیسی متناوب پیرامونی عمود بر H_0 ایجاد می‌کند.



شکل ۱. رسانای مغناطیسی استوانه‌ای با شعاع a داخل میدان مغناطیسی dc طولی و جریان i_{ac} در راستای محور نمونه اعمال شده است. میدان مغناطیسی کل از دو جمله میدان استاتیک H و مؤلفه‌های دینامیکی میدان مغناطیسی h و بسیار کوچکتر از جمله استاتیک، تشکیل می‌شود. میدان الکتریکی با e نمایش داده شده است.

امپدانس سطحی (Z_s)، نسبت مؤلفه‌های مماسی میدان الکتریکی به مغناطیسی در سطح نمونه تعریف می‌شود. طبق این تعریف، بر اساس یکای گاوسی، امپدانس سطحی بی‌بعد می‌شود و باید در ضرب بعد دار $\frac{4\pi}{c}$ ضرب شود تا دارای بُعد امپدانس شود. لازم به ذکر است تمامی روابط این مقاله در یکای گاوسی بیان شده‌اند.

برای توصیف امپدانس سطحی لازم است انتشار امواج الکترومغناطیسی در فلزات بررسی شود که ملزم به حل همزمان معادلات ماکسول و معادله حرکت لاندائو - لیفشیتز است. برای حل مسئله با توجه به مقادیر بالای رسانندگی σ در فلزات می‌توان از جریان

جابه جایی (**D**) در مقایسه با جریان رسانندگی صرف نظر کرد. با اعمال این شرایط به معادلات ماکسول، معادلات

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}), \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (4\pi\sigma/c)\mathbf{E}. \quad (2)$$

به دست می آیند. معادله حرکت مغناطش معروف به معادله لاندائو - لیفشیتز برای محیط با اتلاف به صورت

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \mathbf{M} \times [\mathbf{H} + (2A/M_0)\nabla^2 \mathbf{M} - (\lambda/\gamma M_0^2)\mathbf{M} \times \mathbf{H}], \quad (3)$$

بیان می شود که γ نسبت ژیرومغناطیسی و برابر با $\gamma = -\frac{g|e|}{2mc}$ می باشد. در این رابطه e بار الکترون، m جرم الکترون، c سرعت نور در خلاء و g ضریب لاندائو می باشد و مقدار عددی آن برابر با 2.8 MHz/Oe است و λ پارامتر اتلاف با ابعاد میدان مغناطیسی است. جمله اول در معادله فوق، H ، میدان مغناطیسی واقعی شامل میدان اعمال شده استاتیک، میدان و امغناطیش^۱ به علاوه میدان ناهمسانگردی است که لازم نیست تصحیح و امغناطش دینامیکی در مسئله وارد شود زیرا با اعمال شرایط مرزی در مسئله گنجانده می شود. جمله دوم با ضریب تبادلی A میدان تبادلی مؤثر می باشد و جمله سوم میدان مؤثر حاصل از پدیده های شامل هر نوع مکانیسم میرایی است.

در بررسی دینامیکی، مغناطش ماده \mathbf{M} شامل دو عبارت، مغناطش اشباع M_0 و مؤلفه های دینامیکی مغناطش $\mathbf{m}(r, t)$ می شود که به صورت

$$\mathbf{M}(r, t) = M_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{m}(r, t), \quad (4)$$

بیان می شود. مؤلفه های دینامیکی مغناطش بسیار کوچکتر از مغناطش اشباع است و در اثر حرکت مخروطی دو قطبی ها در سراسر فیلم ایجاد می شود. میدان مغناطیسی کل نیز از دو جمله میدان استاتیک، H_0 ، و مؤلفه های دینامیکی میدان مغناطیسی که بسیار کوچکتر از جمله استاتیک است، تشکیل می شود. میدان مغناطیسی رابطه ای همانند رابطه مغناطش به شکل

¹ demagnetization

$$\mathbf{H}(r, t) = H_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{h}(r, t), \quad (5)$$

دارد که H_0 میدان مغناطیسی اعمال شده در راستای Z و $\mathbf{h}(r, t)$ میدان مغناطیسی دینامیکی می‌باشد و میدان الکتریکی به صورت $\mathbf{E} = \mathbf{e}$ بیان می‌شود. با فرض آنکه مؤلفه‌های دینامیکی \mathbf{m} ، \mathbf{h} و \mathbf{e} ، متناسب با $e^{i(\omega t - ky)}$ در درون رسانا است و $\frac{|\mathbf{m}|}{M_0}$ و

$\frac{|\mathbf{h}|}{H_0}$ با تقریب خطی در مقایسه با واحد کوچک باشد، با گرفتن کرل از رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = \frac{2i}{\delta^2} (\mathbf{h} + 4\pi \mathbf{m}), \quad (6)$$

که $\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma}}$ عمق نفوذ کلاسیکی برای $\mu = 1$ است. همچنین c سرعت نور در خلاء، σ رسانندگی و ω بسامد زاویه ای است. رابطه فوق سه معادله با شش مجهول می‌باشد که لازم است برای سه معادله دیگر از معادله لاندائو - لیفشیتز، رابطه (۳)، استفاده شود. پاسخ معادلات فوق به صورت توابع بسل از نوع اول با آرگومان مختلط به صورت

$$\begin{aligned} h_r, h_\phi, m_r, m_\phi &\propto J_1(kr), \\ h_z, m_z &\propto J_0(kr), \end{aligned} \quad (7)$$

به دست می‌آید [۴]. در این پاسخ‌ها فرض می‌شود که وابستگی پیرامونی وجود ندارد و مشتقات اول و دامنه مؤلفه‌های پیرامونی و شعاعی در مرکز سیم، $r = 0$ ، صفر می‌شود و متناظراً مؤلفه محوری به بیشینه مقدار خود در آن جا می‌رسد. در مسائل عمومی‌تر همانند محیط لایه لایه‌ای لازم است که جواب‌های از نوع دوم بسل، $N_0(kr)$ و $N_1(kr)$ ، اضافه شود اما در مورد هندسه مورد بررسی ما به علت شرایط مرزی، m و h محدود در مرکز سیم، مجاز به استفاده از نوع دوم بسل نمی‌باشیم. با جایگذاری این توابع بسل در معادله (۳) و در نظر گرفتن جملات خطی، خواهیم داشت:

$$i\omega \mathbf{m} = \gamma \{ [(\mathbf{m} \times H_0) + (M_0 \times \mathbf{h})] + (2A / M_0^2) M_0 \times \nabla^2 \mathbf{M} - (\lambda / \gamma M_0^2) M_0 \times [(\mathbf{m} \times H_0) + (M_0 \times \mathbf{h})] \},$$

لازم است برای نوشتن شکل مؤلفه‌های معادله فوق، با توجه به حل مسئله در مختصات استوانه‌ای، ∇^2 در مختصات استوانه‌ای نوشته شود که مشتق مؤلفه‌های مغناطش به علت

عدم وابستگی به φ و Z صفر می شود و با استفاده از روابط بازگشتی و مشتقی معادلات بسط به روابط $(\nabla^2 m)_\varphi = -k^2 m_\varphi$ ، $(\nabla^2 m)_r = -k^2 m_r$ ، و $(\nabla^2 m)_z = -k^2 m_z$. برای مؤلفه های $\nabla^2 \mathbf{m}$ خواهیم رسید. مشابه همین روابط برای مؤلفه های میدان مغناطیسی نتیجه می شود. شکل مؤلفه ای معادله فوق با استفاده از روابط به دست آمده برای $\nabla^2 \mathbf{m}$ برابر است با:

$$\left(\frac{i\omega}{\gamma} + \frac{\lambda H_0}{\gamma M_0}\right)m_r - \left(H_0 + \frac{2Ak^2}{M_0}\right)m_\varphi - \frac{\lambda}{\gamma}h_r + M_0 h_\varphi = 0, \quad (8\text{-الف})$$

$$\left(H_0 + \frac{2Ak^2}{M_0}\right)m_r + \left(\frac{i\omega}{\gamma} + \frac{\lambda H_0}{\gamma M_0}\right)m_\varphi - M_0 h_r - \frac{\lambda}{\gamma}h_\varphi = 0, \quad (8\text{-ب})$$

$$m_z = 0. \quad (8\text{-ج})$$

با جایگذاری معادلات (۷) در معادله (۶) و نوشتن شکل مؤلفه ای آن و با استفاده از روابط به دست آمده برای $\nabla^2 \mathbf{h}$ ، و صفر قرار دادن مشتقات مؤلفه های h نسبت به φ و Z خواهیم داشت:

$$h_r + 4\pi m_r = 0, \quad (9\text{-الف})$$

$$\left[1 - \frac{i\delta^2 k^2}{2}\right]h_\varphi + 4\pi m_\varphi = 0, \quad (9\text{-ب})$$

$$\left[1 - \frac{i\delta^2 k^2}{2}\right]h_z + 4\pi m_z = 0, \quad (9\text{-ج})$$

معادلات (۸) و (۹)، مجموعه ای از معادلات خطی همگن را تشکیل می دهند. معادله (۹-الف)، ضریب و امغناطش دینامیکی در راستای شعاعی تعریف می شود، در حالی که ضریب و امغناطش دینامیکی در راستای محور و پیرامون به علت آن که سیم دراز فرض شده، صفر می شود. نکته قابل توجه دیگر این که بنا بر معادلات (۸-ج) و (۹-ج) چنان چه $k^2 = -\frac{2i}{\delta^2}$ نباشد، آنگاه $h_z = 0$ می شود و در نتیجه فقط چهار معادله (۸-الف)، (۸-ب)، (۹-الف) و (۹-ب) باقی می ماند. اما در حالت خاص $k^2 = -\frac{2i}{\delta^2}$ ، h_z مخالف صفر می شود. با توجه به معادله (۹-ب)، $m_\varphi = 0$ شده و با قرار دان این شرایط در معادلات (۸-الف) و (۸-ب)، تمام مؤلفه های \mathbf{m} و h_r و h_φ صفر به دست می آید که جواب

خاصی است به همین علت از این به بعد حالتی را در نظر می‌گیریم که $h_z = 0$ باشد. اگر از معادله (۹-الف) برای حذف h_r در معادلات دیگر استفاده شود در آن صورت سه معادله خطی همگن برای m_ϕ و m_r و h_ϕ به صورت

$$(K^2 + 1 + \eta)m_r + (i\Omega + L\eta)m_\phi - (L/4\pi)h_\phi = 0, \quad (10\text{-الف})$$

$$(i\Omega + L\eta + L)m_r - (K^2 + \eta)m_\phi + (1/4\pi)h_\phi = 0, \quad (10\text{-ب})$$

$$8\pi i \varepsilon^2 m_\phi + (K^2 + 2i\varepsilon^2)h_\phi = 0, \quad (10\text{-ج})$$

به دست می‌آید که پارامترهای بی‌بعد در معادلات بالا به صورت $\eta = \frac{H_0}{4\pi M_0}$

$$K = k\varepsilon\delta, \quad \varepsilon^2 = \frac{A}{2\pi M_0^2 \delta^2}, \quad \Omega = \frac{\omega}{4\pi M_0 \gamma}, \quad L = \frac{\lambda}{M_0 \gamma},$$

داشتن پاسخ غیر صفر برای معادلات (۱۰)، صفر شدن دترمینان ضرایب است و با انجام این

عمل معادله عمومی

$$K^6 + c_1 K^4 + c_2 K^2 + c_3 = 0, \quad (11)$$

حاصل می‌شود که ضرایب c_1 ، c_2 و c_3 برابر با

$$c_1 = 1 + 2\eta + 2i\varepsilon^2,$$

$$c_2 = \eta - \Omega^2 + i\Omega L + \eta L(2i\Omega + L) + \eta^2(1 + L^2) + 4i\varepsilon^2(1 + \eta),$$

$$c_3 = 2i\varepsilon^2 \{ (1 + \eta)^2 - \Omega^2 + L(1 + \eta)[2i\Omega + L(1 + \eta)] \}.$$

است. معادله عمومی (۱۱)، یک معادله درجه سوم بر حسب K^2 می‌باشد و سه ثابت انتشار

k_1 ، k_2 و k_3 (از K_1 ، K_2 و K_3 به دست می‌آیند) وجود دارند. برای هر کدام از این

سه موج (K_1 ، K_2 و K_3) مؤلفه‌های میدان را می‌توان بر حسب جملات $h_{n\phi}$ بیان نمود

که از حل معادله عمومی به دست می‌آید. نتیجه روابط را می‌توان به صورت فشرده و با

ضمیمه کردن اندیس n ($n=1, 2, 3$) مربوط به مقادیر سه گانه K با استفاده از روابط

(۱۰) به صورت

$$m_{n\phi} = u_n h_{n\phi}, \quad (12\text{-الف})$$

$$m_{nr} = v_n h_{n\phi}, \quad (12\text{-ب})$$

ارائه داد، که در آن $u_n = \frac{-K_n^2 - 2i\varepsilon^2}{8\pi i \varepsilon^2}$ و $v_n = \frac{(K_n^2 + \eta)(-K_n^2 - 2i\varepsilon^2) - 2i\varepsilon^2}{8\pi i \varepsilon^2 (i\Omega + L\eta + L)}$ می‌باشند.

ابتدا برای راحتی پارامتر Z' را به صورت $Z' = \left(\frac{4\pi\varepsilon\sigma\delta}{c}\right) \frac{e_{0z}}{h_{0\phi}}$ تعریف کرده که e_{0z} و $h_{0\phi}$ به ترتیب مؤلفه‌های محوری و پیرامونی میدان الکتریکی و مغناطیسی در سطح نمونه $r = a$ می‌باشند و امپدانس سطحی با استفاده از رابطه Z' به صورت

$$Z_s = \frac{\dot{Z}}{\varepsilon\sigma\delta_{eff}} \quad (13)$$

بیان می‌شود. δ_{eff} عمق پوسته مؤثر است که برای مواد مغناطیسی با نفوذپذیری مغناطیسی به صورت $\delta_{eff} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\omega\sigma\mu_{equ}}}$ تصحیح می‌شود. وابستگی μ_{equ} به میدان مغناطیسی اعمال شده باید در اثر امپدانس مغناطیسی لحاظ شود. هرگونه کوششی برای مدل کردن MI، در جهت یافتن پاسخی برای μ_{equ} از طریق معادله لاندائو-لیفشیتز پیش رود.

با استفاده از تعریف مقاومت dc برای نمونه، $R_{dc} = \frac{l}{\pi a^2 \sigma}$ و به کمک رابطه (۱۳)، می‌توان امپدانس نرمال رسانا را به صورت $Z/R_{dc} = (\Lambda/2)Z'$ بیان نمود که Λ شعاع نرمال شده با رابطه $\Lambda = \frac{a}{d_{ex}}$ داده می‌شود. d_{ex} طول تبدالی برابر با $d_{ex} = \varepsilon\delta = \sqrt{\frac{A}{2\pi M_0^2}}$ است و فاصله گشتاورهای اتمی ناشی از برهمکنش‌های تبدالی قوی را نشان می‌دهد که اغلب موازی یکدیگر قرار می‌گیرند [۵]. با توجه به این تعریف‌ها، امپدانس نرمال رسانا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Z = R_{dc} \frac{a\sigma}{2} Z_s. \quad (14)$$

برای یافتن پاسخ کامل مسئله، نیاز به دانستن دامنه‌های \mathbf{h} ، \mathbf{m} و \mathbf{e} در مرز هوا-فلز می‌باشد و بدین منظور لازم است شرایط مرزی برای میدان مغناطیسی، الکتریکی و مغناطش معرفی شوند. اعمال شرایط مرزی، شرط پیوستگی مؤلفه مماسی میدان مغناطیسی \mathbf{h} و مؤلفه مماسی میدان الکتریکی \mathbf{e} در مرز $r = a$ روابط زیر را می‌دهد:

$$h_{1\varphi} + h_{2\varphi} + h_{3\varphi} = h_{0\varphi}, \quad (15)$$

$$e_{1z} + e_{2z} + e_{3z} = e_{0z}, \quad (16)$$

که $h_{n\varphi}$ و e_{nz} ($n=1,2,3$) سه جواب معادله عمومی داخل رسانا است و میدان مغناطیسی و الکتریکی در هوا به ترتیب با $h_{0\varphi}$ و e_{0z} نشان داده می‌شوند. با نوشتن معادله (۲) به صورت مؤلفه‌ای در مختصات استوانه‌ای و با توجه به $m_z = h_z = 0$ و صفر قرار دادن مشتق‌ها نسبت به φ و z و با استفاده از روابط بازگشتی و مشتقی معادلات بسط می‌توان رابطه‌ای بین $h_{n\varphi}$ و e_{nz} به صورت

$$kJ_0(kr) = \frac{4\pi\sigma}{c} e_z,$$

پیدا نمود. با تقسیم رابطه فوق بر $h_{\varphi} \propto J_1(kr)$ ، رابطه

$$\frac{kJ_0(kr)}{J_1(kr)} = \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{e_z}{h_{\varphi}}, \quad (17)$$

به دست می‌آید. با توجه به رابطه امپدانس سطحی، رابطه $Z_s = \left(\frac{4\pi}{c}\right) \frac{e_{0z}}{h_{0\varphi}}$ ،

$$Z_s = \frac{k J_0(kr)}{\sigma J_1(kr)},$$

نتیجه می‌شود. اگر به رابطه (۱۷) باز گردیم می‌توانیم رابطه‌ای بین $h_{n\varphi}$ و e_{nz} به صورت

$$e_{nz} = \frac{ck_n}{4\pi\sigma} \frac{J_0(kr)}{J_1(kr)} h_{n\varphi},$$

به صورت

$$e_{nz} = \frac{cK_n}{4\pi\sigma\epsilon\delta} \frac{J_0(k_n r)}{J_1(k_n r)} h_{n\varphi}. \quad (18)$$

نوشت. با قرار دادن رابطه (۱۸) در معادله (۱۶)، رابطه

$$\xi_1 K_1 h_{1\varphi} + \xi_2 K_2 h_{2\varphi} + \xi_3 K_2 h_{2\varphi} = Z h_{0\varphi}, \quad (19)$$

به دست می‌آید، که در آن $\xi_n = \frac{J_0(K_n \Lambda)}{J_1(K_n \Lambda)}$ می‌باشد.

با توجه به وجود میدان تبدیلی، شرایط مرزی گشتاور تبدیلی کل در واحد سطح در مرز

هوا-فلز با رابطه

$$2\pi \int_0^a \mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ex} dr = 0,$$

داده می‌شود که با جایگذاری H_{ex} و استفاده از این حقیقت که مغناطش شعاعی و پیرامونی در $r=0$ وجود ندارد و انتگرال گیری از آن خواهیم داشت [۵]:

$$\left. \left(\frac{\partial m_\phi}{\partial r} + \frac{m_\phi}{r} \right) \right|_{r=a} = 0, \quad (20)$$

$$\left. \left(\frac{\partial m_r}{\partial r} + \frac{m_r}{r} \right) \right|_{r=a} = 0, \quad (21)$$

که از این دو شرط برای یافتن امیدانس سطحی استفاده می‌شود. با توجه به معادلات (۷) و مشتق گیری آن‌ها و قرار دادن در شرایط مرزی (۲۰) و (۲۱) معادله

$$k_1 J_0(K_1 \Lambda) + k_2 J_0(K_2 \Lambda) + k_3 J_0(K_3 \Lambda) = 0,$$

به دست می‌آید. با توجه به رابطه ξ_i ، می‌توان $J_0(K_n \Lambda)$ را بر حسب $J_1(K_n \Lambda)$ به صورت $J_0(K \Lambda) = \xi_i J_1(K \Lambda)$ نوشت و با جایگذاری $J_1(K_n \Lambda) \propto m_{n\phi, nr}$ و رابطه فوق به:

$$K_1 \nu_1 \xi_1 h_{1\phi} + K_2 \nu_2 \xi_2 h_{2\phi} + K_3 \nu_3 \xi_3 h_{3\phi} = 0, \quad (22)$$

$$K_1 u_1 \xi_1 h_{1\phi} + K_2 u_2 \xi_2 h_{2\phi} + K_3 u_3 \xi_3 h_{3\phi} = 0. \quad (23)$$

تبدیل می‌شود. با استفاده از چهار معادله شرط مرزی (۱۵)، (۱۹)، (۲۲) و (۲۳)، دستگاه معادلات در صورتی پاسخ‌های غیربديهی خواهد داشت که دترمینان ضرایب صفر باشد:

$$\begin{vmatrix} 1 & \xi_1^{-1} & \xi_2^{-1} & \xi_3^{-1} \\ Z' & K_1 & K_2 & K_3 \\ 0 & u_1 K_1 & u_2 K_2 & u_3 K_3 \\ 0 & \nu_1 K_1 & \nu_2 K_2 & \nu_3 K_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (24)$$

در این معادله فقط Z' مجهول می‌باشد.

۳. توصیف پاسخ‌ها

معادله عمومی (۱۱)، معادله درجه سومی بر حسب K^2 می‌باشد که سه جفت پاسخ معادله $\pm K_1$ ، $\pm K_2$ و $\pm K_3$ برای هر مقدار H_0 و ω دارد. استفاده از ریشه‌های مثبت یا منفی

دلخواه است زیرا $J_n(\pm Kr)$ ما را به پاسخ فیزیکی یکسانی رهنمون می‌شود و نهایتاً پاسخ عمومی برای کمیت‌های $h_r, h_\varphi, m_r, m_\varphi$ به شکل زیر می‌باشد:

$$e^{i\alpha x} \sum_{j=1}^3 [A_j J_j(k_j r) + B_j N_j(k_j r)], \quad (25)$$

که A_j و B_j ثابت‌هایی هستند که به کمک شرایط مرزی تعیین می‌شوند. اما در مورد هندسه انتخابی ما با توجه به این که می‌دانیم $N_j(k_j r)$ در مبدأ واگرا می‌شود باید ضریب آن یعنی B_j صفر شود. لازم به ذکر است که پاسخ‌های به دست آمده فقط وابسته به شعاع می‌باشند و ما در ناحیه $r < a$ دارای مد غیر یکنواخت خواهیم بود و فاز مغناطش H به اندازه 2π در طول $2\pi r$ تغییر می‌کند. ترکیب امواج شعاعی و دایره ای تشکیل یک موج ماریچ می‌دهد که رو به جلو حرکت می‌کند.

ریشه‌های به دست آمده از معادله (۱۱) به طور کلی در مورد یک موج الکترومغناطیس و دو موج اسپینی صحبت می‌کند زیرا اگر اثرات تبدالی صرف نظر می‌کردیم معادله (۱۱) از معادله درجه سوم بر حسب K^2 به معادله درجه اول بر حسب K^2 تبدیل می‌شد و تنها پاسخ آن همان موج الکترومغناطیس در حالت تشدید می‌شد. اما با وارد کردن اثرات تبدالی به معادله درجه سوم بر حسب K^2 تبدیل می‌شود یعنی دو موج اضافه می‌شود و از آن جا که می‌دانیم منشأ امواج اسپینی اثرات تبدالی است در نتیجه دو موج به دست آمده از جنس امواج اسپینی می‌باشد که یکی از این امواج اسپینی در حالت تشدید و دیگری در حالت پادتشدید است. در حالت کلی موج حاصل از این معادله ترکیبی از امواج اسپینی و مغناطیسی است که دارای بعضی از خواص امواج اسپینی و موج مغناطیسی می‌باشد. برای راحتی کار فرض می‌کنیم که K_1, K_2 و K_3 به ترتیب به شاخه‌های امواج الکترومغناطیسی تشدید، امواج اسپینی تشدید و پادتشیدی مربوط می‌باشد. با حل معادله (۱۱) بر حسب پارامترهای Ω, L, ε تقریباً در می‌یابیم که $K_3 \cong -i$ است و اندازه آن بسیار بزرگتر از قسمت‌های موهومی K_1 و K_2 است به طوری که امواج اسپینی پادتشدید به شدت کاهش می‌یابد و می‌توان از آن صرف نظر نمود.

حل دقیق دترمینان (۲۴) بسیار مشکل می باشد به همین دلیل خودمان را به موردی محدود می کنیم که همه کمیت های η ، Ω^2 ، L^2 ، ΩL و ε در برابر واحد کوچک باشند که در این تقریب Λ با توجه به رابطه $\Lambda = \frac{a}{\varepsilon\delta}$ بسیار بزرگتر از یک می شود و از حالات حدی توابع بسل استفاده می شود:

$$J_0(x)_{x \rightarrow \infty} = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4),$$

$$J_1(x)_{x \rightarrow \infty} = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \pi/2 - \pi/4) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4),$$

با جایگذاری این روابط در معادله مربوط به ξ مقدار یک برای ξ نتیجه می شود و با قرار دادن این مقدار ξ در دترمینان (۲۴)، پذیرفتاری همگن معادل به صورت

$$\mu_{equ} = \frac{\eta - \Omega^2 + i\Omega L + 2\varepsilon(1+i)}{[\eta - \Omega^2 + i\Omega L + \varepsilon(1+i)]^2}. \quad (26)$$

به دست می آید. با صرف نظر کردن از اثرات تبدالی، $A = 0$ و $\varepsilon = 0$ ، فقط جمله K_1

باقی می ماند و معادله عمومی به رابطه $K^2 = -\frac{c_3}{c_1}$ کاهش می یابد و پذیرفتاری همگن

معادل به صورت

$$\mu_{equ} = \frac{1}{\eta - \Omega^2 + i\Omega L}. \quad (27)$$

نتیجه می شود. از این معادله، شرط تشدید به صورت $\eta = \Omega^2$ به دست می آید که با قرار دادن روابط مربوط به η و Ω ، شرط تشدید به صورت $\omega^2 = \gamma^2 4\pi M_0 H_0$ بیان می شود که همان شرط تشدید به دست آمده توسط کیتل [۶] در غیاب اثرات تبدالی است. با صرف نظر کردن از اتلاف، λ و L ، رابطه (۲۶) به:

$$\mu_{equ} = \frac{\eta - \Omega^2 + 2\varepsilon(1+i)}{[\eta - \Omega^2 + \varepsilon(1+i)]^2}, \quad (28)$$

تبدیل می شود و شرط تشدید برابر با $\eta = \Omega^2 - \varepsilon(1+i)$ می شود که اندازه آن به میزان کمی از رابطه (۲۶) جابه جا شده است. این رابطه توافق خوبی با آزمایش های انجام شده توسط رادو و ویرتمن دارد [۷]. در این آزمایش ها جابه جایی در میدان تشدید به علت اثرات تبدالی در حدود ۲۰ تا ۳۰ درصد می باشد. از سوی دیگر برای فلزات با استفاده از

معادلات ماکسول می‌دانیم امیدانس برابر با $Z = \sqrt{\frac{\mu_{equ}}{\epsilon_{equ}}}$ است که μ_{equ} پذیرفتاری همگن

معادل می‌باشد و به صورت مختلط بیان می‌شود: $\mu_{equ} = \mu_1 - i\mu_2$. با استفاده از این روابط نتیجه می‌گیریم:

$$\epsilon_{equ} = -\frac{4\pi i \sigma}{\omega}$$

$$\mu_{equ} = -\frac{i}{2} \left(\frac{Z'}{\epsilon} \right)^2, \quad (29)$$

که در آن کمیت ϵ با معادله $\epsilon^2 = \frac{A}{2\pi M_0^2 \delta^2}$ مشخص می‌شود و نباید با کمیت ϵ_{eff}

اشتباه شود. Z' از معادله (۲۴) به دست می‌آید و معادل آن μ_{equ} تعیین می‌گردد. اغلب در محاسبات قسمت حقیقی و موهومی امیدانس جداگانه مطرح می‌شود، از این رو مناسب است که امیدانس به صورت $Z = (R + iX)$ نوشته شود.

۴. نتایج

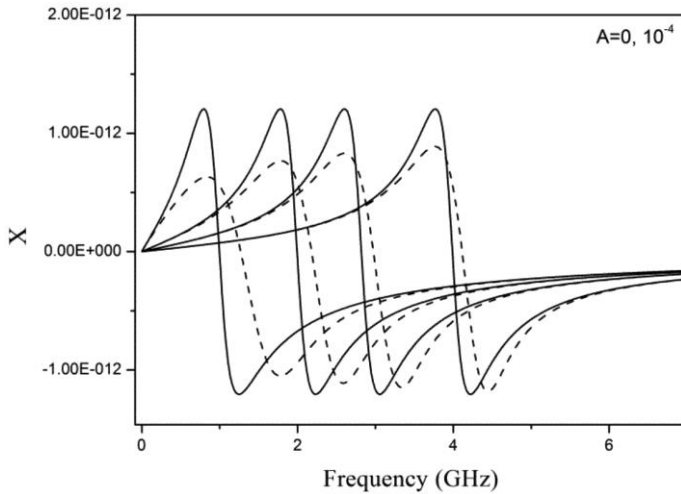
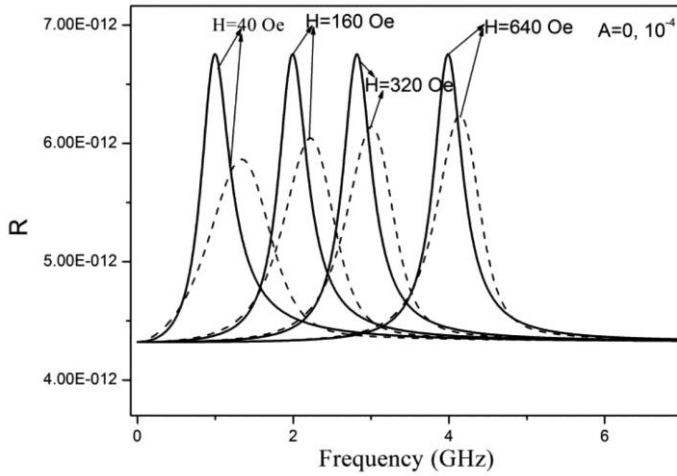
در این بخش اثر ثابت تبادلی بر روی امیدانس بررسی شده است. برای یافتن منحنی‌ها از پارامترهای ماده آمورف سیم CoFeSiB استفاده شده است که مشخصه‌های این ماده در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول ۱. ثابت‌های فیزیکی استفاده شده برای رسم منحنی‌ها

واحد	رسانندگی (σ)	مغناطش اشباع (M_0)	ضریب تبادلی (A)	$\gamma/2\pi$	$\lambda/2\pi$
Cgs	0.737×10^{16} (s)	۶۴۰ emu/cc	10^{-6} erg/cm	۲/۸ MHz/Oe	۴۸MHz
MKSA	$0.737 \times 10^{16} \text{ m}^{-1} \Omega$	۰/۸۰۳ T	10^{-11} J/m	۲۸ GHz/T	۴۸MHz

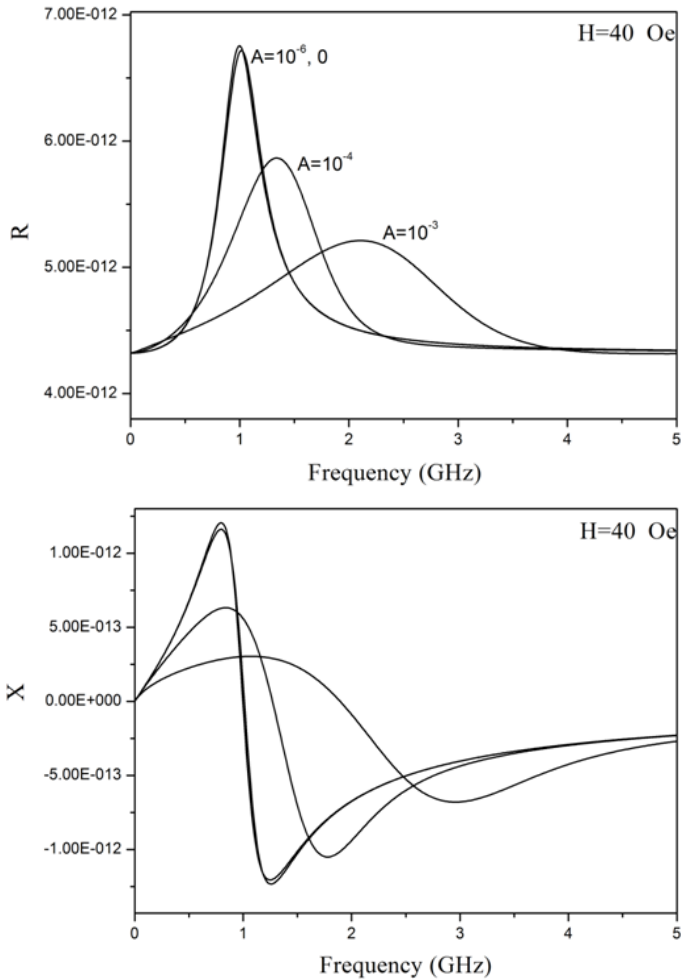
مقایسه بین دو حالت، با در نظر گرفتن اثرات تبادلی و بدون آن با تقریب‌های انجام شده برای قسمت حقیقی (R) و قسمت موهومی (X) امیدانس در شکل (۲) نشان داده شده است و نشان می‌دهد که قلّه امیدانس در حالتی که از ثابت تبادلی صرف نظر شود بر

$\eta = \Omega^2$ منطبق می باشد. منحنی های تیزتر مربوط به حالتی است که اثرات تبادل در نظر گرفته نشده است.



شکل ۲. وابستگی قسمت حقیقی و موهومی امپدانس با در نظر گرفتن ثابت تبادل و برای میدان های مغناطیسی متفاوت. خطوط تیزتر مربوط به منحنی هایی است که $A = 0$ می باشد و با خطوط پیوسته نشان داده شده است.

در شکل (۲) برای این که تأثیر اثر تبدالی به وضوح دیده شود ثابت تبدالی در محاسبات 10^{-4} در نظر گرفته شده است اما در واقع از این مقدار کمتر می‌باشد. شکل (۳) وابستگی R و X به مقدارهای مختلف ثابت تبدالی را نشان می‌دهد.



شکل ۳. وابستگی قسمت حقیقی و موهومی امپدانس به ثابت تبدالی در میدان ثابت ۴۰ اورستد.

همان‌طور که در این شکل دیده می‌شود هنگامی که اثر تبدالی 10^{-6} باشد تفاوت زیادی میان حالتی که اثر تبدالی را در نظر بگیریم یا نه وجود ندارد. در این حالت با در نظر گرفتن

اثرات تبادلی اصلاح اندکی در شکل و فرکانس تشدید صورت می گیرد که این تفاوت در فرکانس های بالاتر اهمیت بیشتری می یابد، از این رو در بررسی های MI در فرکانس های بالا، یعنی در بازه امواج ماکروویو که اغلب در فرکانس های بالای ۱ GHz می باشد، اثرات تبادلی وارد می شود و در فرکانس های پایین با تقریب بسیار خوبی می توان از اثرات تبادلی صرف نظر نمود.

۵. نتیجه گیری

با استفاده از دستاوردهای این مقاله به یک شناخت کلی نظری از امیدانس مغناطیسی و دینامیک مغناطش در سیم های مغناطیسی به ویژه در فرکانس های بالا دسترسی پیدا کردیم. با داشتن روابط مربوط به این اثر و چگونگی به دست آوردن آن ها نظیر پارامترهایی مانند ناهمسانگردی، برهمکنش تبادلی در فرکانس های متفاوت، اثر ابعاد و شکل نمونه و سایر پارامترهای مهم دیگر، اکنون طراحی برای ساخت ماده به منظور کاربرد و مطالعه این اثر امکان پذیر است. می توان اثر پارامترهای مختلف را در یک ماده پیش از ساخت آن پیش بینی کرد که کمک فراوانی در بخش تجربی مطالعه این اثر دارد.

۶. منابع

- [1] R.S. Beach and A.E. Berkowitz; *Appl. Phys. Lett.* **64** (1994) 3652.
- [2] L.V. Panina and L.V.K. Mohri; *Appl. Phys. Lett.* **56** (1994) 1189.
- [3] M.H. Phan and H.X. Peng; *Progress in Material Science* **53** (2008) 323-420.
- [4] L.D. Landau and E.M. Lifshitz; "Electrodynamics of Continuous Media"; Pergamon, Oxford (1975).
- [5] A.G. Gurevich and G.A. Melkov; "Magnetic Oscillations and Waves"; Nauka, Moscow, (1994) (in Russian).
- [6] C. Kittle; *Phys. Rev.* **71** (1947) 270.
- [7] G.T. Rado and J.R. Weertman; *Phys. Rev.* **94** (1954) 1386.