# Investigation of ion-acoustic compressive and rarefactive solitons in multicomponent plasma with negative ions

## Seyedeh Raheleh Sajjadi<sup>1</sup>, Akbar Nazari-Golshan\*<sup>1</sup>

## Abstract

Propagation of ion-acoustic compressive (positive) and rarefactive (negative) solitons in a multicomponent plasma system consisting of positive and negative ions and electrons have been investigated. The Korteweg-de Vries (KdV) equation for a multicomponent plasma system has been considered. Then the Adomian decomposition method (ADM) has been applied to solve KdV equation and to obtain its soliton solution. Furthermore, the effect of parameters such as negative ion density (r) and velocity (v) on the considered soliton is studied. Our obtained results show that in the fast mode of ion-acoustic soliton, there is a critical value of negative ions ( $r_c$ ) below which the compressive solitons can exist and for value above that, the rarefactive solitons can be present. Both solitons will be defined through the KdV equation. Consequently, as density is a constant, the amplitude of the positive and negative solitons increases with an increase in the velocity. It is vice versa for the width.

**Keywords:** Compressive and Rarefactive solitons, Ion-acoustic soliton, KdV equation, Adomian decomposition method.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Physics Department, Shahed University, Tehran, Iran.

<sup>\*</sup> Corresponding Author; E-mail: nazarigolshan@yahoo.comt

# بررسی سالیتونهای یون۔صوتی متراکم و رقیق در پلاسمای چند جزئی با یونهای منفی<sup>ا</sup>

سیده راحله سجادی<sup>۲</sup> و اکبر نظری *گ*لشن<sup>\*\*</sup>

تاریخ ارسال: ۱۳۹۵/۱۱/۱۸ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۵/۱۷ تاریخ تصویب: ۱۳۹۷/۰۷/۱۱

#### چکیدہ

انتشار سالیتون های یون صوتی متراکم (مثبت) و رقیق (منفی) در یک سیستم پلاسمای چندجزئی شامل یون های مثبت و منفی و الکترون ها بررسی شده است. معادلهٔ کورته و گندوری (KdV) برای سیستم پلاسمای چندجزئی نوشته شد. سپس با استفاده از روش تجزیه آدومین (ADM) به حل معادلهٔ KdV پرداخته و جواب سالیتونی این معادله به دست آمد. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل غلظت یون منفی (r) و سرعت (v) بر روی امواج سالیتونی مورد نظر، بررسی شد. نتایج نشان میدهند برای مد سریع سالیتون های یون صوتی یک غلظت بحرانی از یون های منفی (r) وجود دارد که در مقادیر کمتر از آن، سالیتون های متراکم و در مقادیر بیشتر از مقدار بحرانی، سالیتون های رقیق حضور دارند، که هر دوی این سالیتون ها با استفاده از معادلهٔ KdV

<sup>۲</sup> گروه فیزیک دانشکدهٔ علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران.

\* نويسندهٔ مسئول: nazarigolshan@yahoo.com

<sup>&</sup>lt;sup>'</sup> شناسه ديجيتال (DOI): 10.22051/jap.2018.14040.1068

۳۸ / بررسی سالیتونهای یونصوتی متراکم و رقیق در پلاسمای چند جزئی با یونهای منفی

همچنین با ثابت بودن غلظت و با افزایش سرعت، دامنهٔ سالیتونهای متـراکـم و رقیق افزایش یافته و پهنای آنها کاهش مییابد.

**واژههای کلیدی**: سالیتونهای متراکم و رقیق، سالیتون یون-صوتی، معادلهٔ KdV، روش تجزیهٔ آدومین.

### ۱. مقدمه

انتشار امواج غیرخطی در پلاسما، مسئلهٔ مهمی در مطالعهٔ فیزیک پلاسماست [۱، ۲]. این امـواج بـا استفاده از معادلات دیفرانسیل غیرخطـی ماننـد معادلـهٔ (Korteweg-de Vries) KdV[۳] توصیف میشوند و دارای جواب سالیتونی میباشد.

سالیتون ها دارای ویژگی های غیرخطی می باشند که می توانند در محیط غیرخطی انتشار یابند، در واقع تشکیل سالیتون نتیجهٔ تعادل بین پاشندگی و غیرخطیت محیط است که در نتیجهٔ آن، شکل و سرعت امواج سالیتونی در حین انتشار و بعد از برخورد با امواج سالیتونی دیگر حفظ می شود [۴]. واشیمی ( و تانیوتی زبرای اولین بار سالیتون های یون صوتی را با استفاده از معادلهٔ KdV

واشیمی و نائیونی برای اولین بار سالیتول های یـول۔صوبی را با استفادہ از معادلیہ ۲۵۷ توصیف کردند [۵].

در آزمایشگاه و در یک آزمایش جدید، آیکزی<sup>۳</sup> و همکارانش برای اولین بـار سـالیتونهـای یونـصوتی را با استفاده از دستگاه پلاسمایی دوبل مشاهده کردند [۴].

ناکامورا<sup>۴</sup> سالیتونهای یون-صوتی را با استفاده از یک باریکهٔ یونی در سیستم پلاسمای سه جزئی به طور تجربی بررسی کرد [۷]. به طور کلی سالیتونهای یون-صوتی توسط محققان زیادی به طور نظری و تجربی بررسی شده است و در بخشی از این مطالعات نشان داده شده است که وجود یون منفی [۸-۱۳] نقش عمدهای را در ناپایداری سالیتونهای یون-صوتی ایفا می کند [۳۸.۸]. همچنین نشان داده شده است که یک غلظت بحرانی (r<sub>c</sub>) برای یونهای منفی وجود دارد که در این غلظت ضریب جملهٔ غیر خطی در معادلهٔ KdV، کاهش یافته و به سمت صفر می رود. در این صورت سالیتونها با استفاده از معادلهٔ اصلاح شدهٔ KdV یعنی معادلهٔ MKdV می رود. در این معادله مراتب بالاتر غیر خطیت را توصیف می کند [۹۰، ۲۰]. معادلهٔ سرطلا

<sup>1</sup> Washimi

- <sup>2</sup> Taniuti
- <sup>3</sup> Ikezi
- <sup>4</sup> Nakamura

که هر دو سالیتون متراکم و رقیق می توانند به طور همزمان در چنین پلاسمایی حضور داشته باشند، چنین سالیتونهایی، سالیتونهای mKdV نامیده می شوند و در آزمایش های زیادی که با استفاده از اضافه کردن SF<sub>6</sub> به پلاسمای گاز آرگون انجام شدهاند، مشاهده شده است [۲۱، ۲۲].

هدف کلی این مقاله بررسی تأثیر پارامتر غلظت یون منفی (r) و سرعت (v) در انتشـار امـواج سالیتونی با حل معادلهٔ KdV با استفاده از روش تجزیهٔ آدومین (ADM) است.

این مقاله در این بخش ها تنظیم شده است: بخش اول، معرفی؛ بخش دوم، تئوری کار و ارائهٔ روش حل؛ بخش سوم، بررسی سالیتون های یون۔صوتی متراکم و رقیق بـرای سیسـتم پلاسـمایی متشکل از -Ar+, F ؛ بخش پایانی شامل نتایج است.

# ۲. تئوری و ارائهٔ روش حل

جهت بررسی سالیتونهای متراکم و رقیق، محیطی پلاسمایی که شامل الکترونهایی با تابع توزیع ماکسولی، یونهای مثبت و همچنین یونهای منفی است در نظر می گیریم و معادلهٔ حاکم بر این پلاسما در مختصات دکارتی یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی است. این معادلهٔ دیفرانسیل غیرخطی برای آشفتگی کمدامنه (1 »  $\frac{e\phi}{kT_e} = \Psi$ ) و امواج با طول موج بلند، هنگامی که نسبت دمای یون به الکترون صفر باشد (0=T)، در پلاسمای چندجزئی با یونهای منفی به صورت زیر است [۱۹، ۲۲، ۲۳

 $\frac{\partial\Psi}{\partial t} + 6\alpha\Psi\frac{\partial\Psi}{\partial x} + 6\beta\Psi^2\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial^3\Psi}{\partial x^3} = 0$ (1)

$$\alpha = \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{2(1-r)S^4} \left( 1 - \frac{r}{\mu} \right) - \frac{1}{2} \right]$$
(Y)

$$\beta = \frac{1}{6} \left[ \frac{15}{4(1-r)S^6} \left( 1 + \frac{r}{\mu^3} \right) - \frac{1}{4} \right]$$
(Y)

$$S = \left(\frac{1+\frac{r}{\mu}}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(\*)

$$\mu = \frac{M_-}{M_+} \quad , \qquad T = \frac{T_i}{T_e} \tag{(b)}$$

$$\nu = 2\alpha h + \beta h^2 \tag{($)}$$

$$D^2 = \frac{4}{(2\alpha h + \beta h^2)} \tag{V}$$

در روابط بالا، r غلظت یون منفی، µ نسبت جرم یون منفی به یون مثبت، T نسبت دمای یون به الکترون، v سرعت سالیتون، h دامنهٔ سالیتون و D پهنای سالیتون است. در اینجا فـرض شـده اسـت

$$\begin{aligned} + + \sum_{k \in \mathbb{C}^{N}} & \sum_{k \in \mathbb{C}^{N}} + \sum_{k$$

<sup>1</sup> Homotopy perturbation method

با اِعمال اپراتور معکوس 
$$L_t^{-1}$$
 به دو طرف معادلهٔ (۱۳) داریم  
 $L_t^{-1}L_t\Psi(x,t) = -6\alpha L_t^{-1}\Psi\Psi_x - L_t^{-1}\Psi_{xxx}$ 
(10)

پس از اِعمال اپراتور معکوس، معادلهٔ (۱۵) به شکل زیر نوشته می شود  
(۱۶) 
$$\Psi(x,t) - \Psi(x,0) = -6\alpha L_t^{-1} \Psi \Psi_x - L_t^{-1} \Psi_{xxx}$$

با تعريف روابط
$$\Psi \Psi_x = F(\Psi(x,t)) , \tag{1V} \label{eq:phi}$$
  $F(\Psi(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ 

می توان معادلهٔ (۱۶) را به صورت زیر نوشت
$$\Psi(x,t) = \Psi(x,0) - 6\alpha L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) - L_t^{-1} \Psi_{xxx}$$
(۱۸)

با جایگذاری رابطه های (۹) و (۱۱) در رابطهٔ (۱۸) داریم  

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x,t) = \frac{4h(e^{x/D})^2}{((e^{x/D})^2 + 1)^2} - 6\alpha L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

$$- L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x,t)\right)_{xxx}$$

$$\sum_{xxx} P_n(x,t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x,t)\right)_{xxx}$$

$$\begin{split} \Psi_0(x,t) &= \frac{4h(e^{x/D})^2}{((e^{x/D})^2 + 1)^2} \\ \Psi_{k+1}(x,t) &= -6\alpha L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x,t)\right)_{xxx}, k \ge 0 \end{split}$$

A<sub>n</sub> چندجملهای های آدومین نامیده میشود که برای عبارت غیرخطی F(Ψ) می تواند با رابطهٔ زیـر بیان شود

$$A_{n} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n}}{d\lambda^{n}} \left[ F\left(\sum_{n=0}^{n} \lambda^{i} \Psi_{i}\right) \right]_{\lambda=0} , \qquad (\Upsilon\Upsilon)$$

$$n = 0.1.2$$

فرمول (۲۱) را می توان به صورت زیر نیز ساده کرد، با فرض اینکه تابع  $F(\Psi)$  غیرخطی است، بنابراین با استفاده از معادلهٔ (۲۱) چندجمله ای های آدومین، به صورت زیر به دست می آیند  $A_0 = F(\Psi_0)$   $A_1 = \Psi_1 F'(\Psi_0)$  $A_2 = \Psi_2 F'(\Psi_0) + \frac{1}{2} \Psi_1^2 F''(\Psi_0)$ 

$$A_{3} = \Psi_{3}F'(\Psi_{0}) + \Psi_{1}\Psi_{2}F''(\Psi_{0}) + \frac{1}{3!}\Psi_{1}^{3}F'''(\Psi_{0}) , \dots$$

$$\begin{split} & \Psi_{1} + \frac{\Psi_{1}}{\Psi_{1}} + \frac{\Psi_{1}}{\Psi_{2}} + \frac{\Psi_{2}}{\Psi_{1}} + \frac{\Psi_{2}}{\Psi_{2}} + \frac{\Psi_{2}}{\Psi_{2}}$$

با جایگذاری رابطۀ (۲۴) در رابطۀ (۱۱) داریم  

$$\Psi(x,t) = \frac{4h(e^{x/D})^2}{((e^{x/D})^2 + 1)^2} + \frac{8h(e^{x/D})^2((e^{x/D})^2 - 1)v}{((e^{x/D})^2 + 1)^3}t + \frac{4hv^2(e^{x/D})^2}{D^2}$$

$$\left\{\frac{\left[(e^{x/D})^4 - 6(e^{x/D})^2 + 1\right]}{((e^{x/D})^2 + 1)^4}\right\} + \frac{\left[((e^{x/D})^2 - 1\right]^2}{((e^{x/D})^2 + 1)^4}\right\}t^2, \dots \dots$$

$$I_{\mathcal{Z}} \text{ calu to the second of the second o$$

۳. بررسی سالیتونهای متراکم و رقیق
شکل ۱ نمودار تغییرات دامنهٔ سالیتون را بر حسب غلظت یون منفی برای پلاسمای متشکل از
Ar<sup>+</sup>, F<sup>-</sup> نشان میدهد. با توجه به شکل ۱ در می یابیم که در غلظت خاصی (همان غلظت بحرانی (r<sub>c</sub>)) نمودار تبدیل به خط عمودی می شود که این موضوع نشان دهندهٔ آن است که در این غلظت

یک مقدار بحرانی از یونهای منفی وجود دارد. به عبارت دیگر، در این نقطهٔ بحرانی، سالیتونها را نمی توان با استفاده از معادلهٔ *KdV توصیف کر*د زیرا در این غلظت ضریب غیر خطیت یعنی α در معادلهٔ KdV صفر می شود. با دقت در شکل ۱، در مقادیر کمتر از غلظت بحرانی سالیتونهای متراکم و در مقادیر بیشتر از آن سالیتونهای رقیق را داریم که هر دوی این سالیتونها با استفاده از معادلهٔ KdV توصیف می شوند. در غلظت بحرانی یونهای منفی (r = r<sub>c</sub>) سالیتونهای متراکم و رقیق همزمان حضور دارند، که این سالیتونها با استفاده از معادلهٔ تعمیم یافته KdV که به اصطلاح سالیتونهای MdV نامیده می شوند. توصیف می شوند. همچنین مشاهده می شود که دامنهٔ سالیتونهای متراکم با افزایش غلظت یون منفی افزایش می یابد و برای سالیتونهای رقیق با افزایش غلظت یون منفی بزرگی دامنه کاهش می یابد.



**شکل ۱**. تغییرات دامنه (h) برحسب غلظت یون منفی (r) برای 0.476 = µ و 0.01 = v.



 $\mu = 0.476$  در سرعت<br/>های مختلف، r = 0.01

۴۴ / بررسی سالیتونهای یونصوتی متراکم و رقیق در پلاسمای چند جزئی با یونهای منفی



در شکلهای ۲\_۵ تغییرات دامنه و پهنای سالیتون متراکم در غلظتهای مختلف، و در هر غلظت برای سرعتهای مختلف رسم شده است. همانطور که از نمودارها مشخص است با افزایش غلظت دامنهٔ سالیتونها افزایش مییابد و پهنای سالیتونها ثابت میماند.



**شکل ٤**. تغییرات دامنه (h) و پهنای (D) سالیتون متراکم بر حسب مکان (x) برای r = 0.06

در سرعتهای مختلف، µ = 0.476.



همچنین با توجه به نمودارها در هر غلظت با افزایش سرعت سالیتون، دامنهٔ سالیتون افزایش مییابد و پهنا کاهش مییابد، که این افزایش دامنه و کاهش پهنا با توجه به خاصیت اساسی سالیتون یعنی تعادل بین پاشندگی و غیرخطیت است.



سرعت های مختلف، 476 = µ.

۴۶ / بررسی سالیتونهای یونصوتی متراکم و رقیق در پلاسمای چند جزئی با یونهای منفی



در شکلهای ۶-۹ تغییرات دامنه و پهنای سالیتونهای رقیق در غلظتهای مختلف، و در هر غلظت برای سرعتهای مختلف رسم شده است. همانطور که در شکلهای ۶-۹ مشخص است با افزایش غلظت تا مقدار مشخصی از غلظت یون منفی بزرگی دامنه کاهش می یابد و از آن مقدار به بعد کمی افزایش می یابد.





سرعتهای مختلف، µ = 0.476.

با توجه به شکلهای ۶\_۹ پهنای سالیتونها در غلظتهای مختلف ثابت میمانـد. همچنـین بـا ثابـت بودن غلظت، با افزایش سرعت بزرگی دامنه افزایش یافته و پهنا کاهش مییابد.

#### ٤. نتايج

در ابتدا با معرفی روش تجزیهٔ آدومین به حل معادلهٔ کورته و گدوری پرداختیم و جواب سالیتونی این معادله را به دست آوردیم. سپس جواب سالیتونی به دست آمده را بررسی کردیم و در یافتیم که برای مد سریع سالیتونهای یون صوتی یک غلظت بحرانی از یونهای منفی وجود دارد که در مقادیر کمتر از این غلظت بحرانی، سالیتونهای متراکم را داریم که دامنهٔ این سالیتونها با افزایش غلظت یون منفی افزایش می یابد. همچنین مشخص شد که در مقادیر بیشتر از غلظت بحرانی یونهای منفی، سالیتونهای رقیق حضور دارند که بزرگی دامنهٔ این سالیتونها با افزایش غلظت یون منفی کاهش می یابد. در غلظت بحرانی سالیتونهای متراکم و رقیق همزمان حضور دارند که این سالیتونها با استفاده از مراتب بالاتر غیر خطیت یعنی با استفاده از معادلهٔ تعمیم یافتهٔ کورته و گدوری توصیف می شوند. همچنین با ثابت بودن غلظت و با افزایش سرعت، دامنهٔ سالیتونهای متراکم و رقیق افزایش یافته و پهنای آنها کاهش می یابد.

#### منابع

- 1. E. Infeld and G. Roland, *Nonlinear Waves, Soliton and Chaos* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990).
- R. C. Davidson, *Method of Nonlinear Plasma Theory* (Academic, New York, 1972).
- 3. P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Soliton: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- S. K. Sharma, K. Devi, N. C. Adhikary and H. Bailung, Phys. Plasmas 15, 082111 (2008).
- 5. H. Washimi and T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. 17, 996 (1966).
- 6. H. Ikezi, R. J. Taylor and D. R. Baker, Phys. Rev. Lett. 25, 11 (1970).
- 7. Y. Nakamura, Phys. Plasma. Control. Fusion 41 (1999).
- 8. F. Araghi and D. Dorranian, J. Theor. Appl. Phys. 7, 41 (2013).
- 9. S. AliShan, N. Akhtar and S. Ali, Astrophys. Space Sci. 351, 181–190 (2014).
- 10. A. Kumar and V. Mathew, Physics of Plasmas 24, 092107 (2017).
- B. Roy, S. Mukherjee, International Journal of Nonlinear Science 23, 67-74 (2017).
- 12. Yu. V. Medvedev, Plasma Physics Reports 43, 37-43 (2017).
- 13. H. Bailung, S. K. Sharma and Y. Nakamura, Phys. Plasmas 17, 062103 (2010).
- S. Hussain, N. Akhtar and S. Mahmood, Astrophysics and Space Science 338(2), (2011).
- 15. M. K. Mishra and R. S. Chhabra, Phys. Plasmas 3, (1996).
- M. A. Allen, S. Phibanchon and G. Rowlands, J. Phys. Plasmas, Vol. 73, Part 2, PP. 215-229, (2007).
- 17. B. C. Kalita and N. Devi, Physics of Fluids B 5, 440 (1993).
- 18. O. H. El-Kalaawy, Phys. Plasmas 18, 112302 (2011).
- 19. S. Watanabe, J. Phys. Soc. Jpn. 53, 952 (1984).
- 20. S. G. Tagare, J. Phys. Plasmas 36, 301 (1986).
- 21. Y. Nakamura and I. Tsukabayashi, Phys. Rev. Lett. 52, 2356 (1984).
- 22. Y. Nakamura and I. Tsukabayashi, J. Phys. Plasma 34, 401 (1985).
- 23. G. C. Das, Phys. Plasma 21, 257 (1979).
- 24. Y. Nakamura, *Nonlinear and Environmental Electromagnetics*, edited by H. Kikuchi (Elsevier, Amsterdam, 1985), P. 139.
- 25. G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method (Kluwer, Boston, 1994).
- 26. A. M. Wazwaz, "Partial Differential Equation and Solitary Wave Theory Nonlinear Physical Science", Springer (2010).

- مجلهٔ فیزیک کاربردی دانشگاه الزهرا<sup>(س)</sup>، سال ششم، پیاپی ۱۳، پاییز و زمستان ۱۳۹۶ / ۴۹
- S. S. Nourazar, A. Nazari-Golshan, A. Yildirim, and M. Nourazar, Z. Naturforsch. A 67, 355 (2012).
- A. Nazari-golshan, S. S. Nourazar, P. Parvin, and H. Ghafoori-Fard, Astrophys. Space Sci. 349, 205–214 (2014).
- 29. A. Nazari-golshan, Phys. Plasmas 23, 082109 (2016).
- S. S. Nourazar, M. Soori, and A. Nazari-Golshan, Aus. J. Basic Appl. Sci. 5(8), 1400–1411 (2011).
- 31. A. Nazari-Golshan, S. S. Nourazar, H. Ghafoori-Fard, A. Yildirim, and A. Campo, Appl. Math. Lett. 26, 1018 (2013).
- 32. S. S. Nourazar and A. Nazari-Golshan, Indian J. Phys. 89(1), 61-71 (2015).
- 33. J. H. He, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2, 230 (1997).

# Investigation of ion-acoustic compressive and rarefactive solitons in multicomponent plasma with negative ions

## Seyedeh Raheleh Sajjadi<sup>1</sup>, Akbar Nazari-Golshan<sup>\*1</sup>

## Abstract

Propagation of ion-acoustic compressive (positive) and rarefactive (negative) solitons in a multicomponent plasma system consisting of positive and negative ions and electrons have been investigated. The Korteweg-de Vries (KdV) equation for a multicomponent plasma system has been considered. Then the Adomian decomposition method (ADM) has been applied to solve KdV equation and to obtain its soliton solution. Furthermore, the effect of parameters such as negative ion density (r) and velocity (v) on the considered soliton is studied. Our obtained results show that in the fast mode of ion-acoustic soliton, there is a critical value of negative ions ( $r_c$ ) below which the compressive solitons can exist and for value above that, the rarefactive solitons can be present. Both solitons will be defined through the KdV equation. Consequently, as density is a constant, the amplitude of the positive and negative solitons increases with an increase in the velocity. It is vice versa for the width.

**Keywords:** Compressive and Rarefactive solitons, Ion-acoustic soliton, KdV equation, Adomian decomposition method.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Physics Department, Shahed University, Tehran, Iran.

<sup>\*</sup> Corresponding Author; E-mail: nazarigolshan@yahoo.comt