Research Paper

Quantum Phase Transition of Kitaev Model on Kagome Lattice in Presence of Ising Perturbation

Seyed Reza Ghazanfari[1], Hossein Mokhtari*[2]

Received: 2019.01.11
Accepted: 2020.01.25

Abstract

We have studied the effect of Ising perturbation in Kitaev model on a Kagome lattice, to find its phase transition from topological phase to symmetry breaking phase. Kitaev model on a Kagome lattice is a quantum spin model with topological order and the importance of studying topological ordered systems has been proved in making quantum memories. In order to find the robustness of the Kagome lattice against external perturbations, we put Kagome lattice spin system on a torus and then, apply an external Ising xx as perturbation and look for phase transitions in the system. In order to solve the problem, we used a high series expansion method based on continuous unitary transformations. Our results show that in presence of Ising xx perturbation, the original model of Kagome lattice is mapped on Ising transverse field on a triangular lattice and a second order phase transition from topologic to $\mathbb{Z}_2$ symmetry-broken phase is occurred.

Keywords: *Phase Transition, Topological Phase, Kagome Lattice, Ising Perturbation, Perturbative Continuous Unitary Transformations*.

[1] Assistant Professor, Department of Solid State physics, Science Faculty, Yazd University. Email: ghazanfari.sr@gmail .com
[2] Associate Professor, Department of Solid State physics, Science Faculty, Yazd University. (Corresponding Author). Email: Phmh.mokhtari@yazd.ac.ir

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال نهم، پیاپی ۱۶، بهار ۱۳۹۸

مقاله پژوهشی

مطالعهٔ گذار فاز کوانتومی در مدل کیتائف بر روی شبکه کاگومه تحت اثر اختلال آیزینگ[1]

سید رضا غضنفری[2]، حسین مختاری[3]*

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۵

چکیده

در این مقاله تأثیر اختلال آیزینگ را در مدل کیتائف بر روی یک شبکهٔ کاگومه بررسی کردیم و شرایط گذار فاز سیستم را از فاز توپولوژیک به فاز منظم مطالعه کردیم. مدل کیتائف بر روی یک شبکهٔ کاگومه یک شبکهٔ اسپین کوانتومی است که نظم توپولوژیک دارد و مطالعهٔ این سیستم از نظر قابلیت استفادهٔ آن در ساخت حافظه های کوانتومی حائز اهمیت است. جهت مطالعهٔ میزان مقاومت در مقابل اختلال خارجی، شبکهٔ کاگومه را بر روی یک چنبره قرار داده و سپس در حضور اختلال آیزینگ xx تغییر فاز را در این سیستم را مطالعه کردیم. برای حل این مسئله از روش بسط مرتبهٔ بالای سری‌ها با عنوان تبدیلات یکانی پیوستهٔ اختلالی استفاده کردیم. نتایج حاصل نشان‌دهندهٔ آن است که مسئله در حضور اختلال آیزینگ xx به مدل آیزینگ در میدان عرضی

---

1 DOI: 10.22051/jap.2020.24028.1114

۲ استادیار، گروه فیزیک حالت جامد، دانشکده علوم، دانشگاه یزد. ghazanfari.sr@gmail.com

۳ دانشیار، گروه فیزیک حالت جامد، دانشکده علوم، دانشگاه یزد. (نویسنده مسئول).
Phmh.mokhtari@yazd.ac.ir

بـر روی شـبکه دوگـان مثلثـی نگاشـته مـی‌شـود و گـذار فـاز مرتبـهٔ دوم از فـاز توپولوژیک به فاز $\mathbb{Z}_2$ با تقارنِ شکسته در سیستم اتفاق می‌افتد.
واژگان کلیدی: *گذار فاز، فاز توپولوژیک، شبکهٔ کاگومه، اختلال آیزینگ، تبدیلات یکانی پیوستهٔ اختلالی.*

۱. مقدمه

فازها و گذار فازهای مواد معمولاً توسط نظریهٔ شکست تقارنی لاندائو [۱] کـه فازهـای مـواد را بـه وسیلهٔ پارامترهای نظم موضعی شناسایی می‌کند دسته بندی می‌شوند. با ایـن حـال، برخـی فازهـای کوانتومی از این الگو تبعیت نمی‌کنند، به طوری که نظم آن‌ها در ارتباط بـا توپولـوژی فضـای آن سیستم بوده و نمی‌توان این نظم را در آن‌ها توسط پارامترهـای موضـعی توصـیف کـرد. بـارزترین مثال از اینگونه فازها را می‌توان در اثر هال کوانتومی کسـری [۲]، مایعـات اسـپینی گـاف‌دار[1] [۳] و شبکه‌های اسپینی کوانتومی [۴] مشاهده نمود.

ونِ (Wen) برای اولین بار، نظم موجود در این گونـه سیسـتم‌هـا را کـه نظریـهٔ شکسـت تقـارن لاندائو قادر به توصیف آن‌ها نبود، به عنوان نظم توپولوژیک معرفی کرد [۵]. از زمان معرفـی نظـم توپولوژیک تاکنون مطالعهٔ سیستم‌های دارای این نظم زمینه‌ای فعال برای تحقیـق در فیزیـک مـادهٔ چگال بوده و خواص آن در انواعِ گوناگونی از پدیده‌ها مانند سیستم‌هـای کوانتـومی هـال کسـری [۶]، مدل‌های دوپاری کوانتومی[2] [۷]، مدل‌های اسپین کوانتـومی [۸]، محاسـبات کوانتـومی [۹] یـا حتی حالت‌های ابررسانایی [10] از راه‌های نظری و آزمایشگاهی بررسی شده‌اند.

در غیاب پارامترهای نظم موضعی، درهم‌تنیدگی بلندبرد در سیستم‌های دارای نظم توپولوژیک سبب پیدایش برخی خواص یکتا همچون تبهگنی حالت پایه و برانگیختگی‌های کسـری (آنیـونی) در این سیستم‌ها می‌شود، به نحوی که تبهگنی حالت پایه در ایـن سیسـتم‌هـا وابسـته بـه توپولـوژی سیستم بوده و در مقابل اختلالات موضعی کوچک مقاوم است. مقاومت تبهگنـیِ حالـتِ پایـهٔ فـاز توپولوژیک در برابر اختلالات موضعیْ این امکان را فراهم می‌سازد تـا بتـوان از ایـن خاصـیت در ساخت حافظه‌های کوانتومی مقاوم در برابر اختلالات خارجی بهره برد.

کیتائف (Kitaev) برای اولین بار مدلی از یک شبکهٔ اسپینی مربعیِ پیچیده به دور یـک چنبـره را به عنوان یک سیستم دارای نظم توپولوژیک جهت توصیف یک حافظهٔ کوانتومی پیشنهاد کـرد [۹]. پس از آن، به همین منظور مدل‌های اسپینی دیگری از قبیل کد رنگی [۱۱] و مدل چنبره‌ای بـر روی شبکهٔ شش‌ضلعی [۱۲] با استفاده از روش‌های گوناگون در شرایط مختلف مطالعه شده‌اند.

---

1 Gapped Spin Liquids
2 Quantum Dimer model

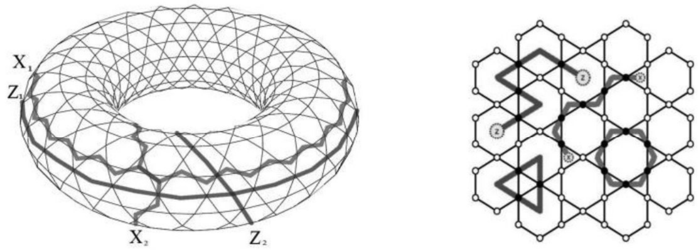
امروزه مطالعهٔ تغییرات فاز کوانتومی در سیستم‌های اسپینی با استفاده از روش شبکهٔ تانسوری [۱۳]، حالت‌های ضرب ماتریسی [۱۴] و روش‌های وردشی [۱۵] مورد توجه بسیاری از محققان مطرح در شاخهٔ مادهٔ چگال قرار گرفته است. نکتهٔ درخور تأمل در اغلب نتایج حاصل از این مطالعات آن است که علی رغم آنکه در سیستم‌های دارای نظم توپولوژیک سیستم در برابر اختلال موضعی مقاوم است، با افزایش قدرت اختلال خارجی، سیستم در نقطه‌ای متحمل گذار فاز شده و به دنبال آن تبهگنی حالت پایه شکسته خواهد شد. این سؤال که سیستم‌های اسپینی مختلف تا چه حد در برابر انواع اختلال مقاوم هستند اخیراً موضوع بحث و تحقیق بسیاری از محققان بوده است [۱۶, ۱۷]. به منظور پاسخ به سؤالی مشابه، ما در این مقاله به بررسی طیف انرژی پایین مدل کیتائف بر روی شبکهٔ کاگومه در حضور برهمکنش کوانتومی آیزینگ به عنوان اختلال پرداخته و شرایط گذار فاز سیستم را در آن تحقیق می‌کنیم.

در ادامه، ابتدا در بخش دوم مدل و مسئله را به طور مختصر تشریح کرده و در بخش سوم روش تبدیلات یکانی پیوسته اختلالی را شرح می‌دهیم و پس از آن نتایج حاصل از به‌کارگیری این روش را در حل مسئله ارائه و تفسیر می‌کنیم و در بخش آخر نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم.

۲. مدل و مسئله

یک شبکهٔ دوبعدی با ساختار کاگومه که در آن اسپین‌های $\frac{1}{2}$ در رئوس شبکه قرار گرفته‌اند در نظر بگیرید (شکل ۱). هامیلتونی حاکم بر این سیستم را می‌توان طبق رابطهٔ زیر بیان کرد [۱۸]

$$H = -J\sum_{v} A_v - J\sum_{p} B_p \qquad (1)$$



شکل ۱ سمت راست، طرحی از شبکهٔ کاگومه به همراه ریسمان‌های باز و بسته، شبه ذرات در انتهای ریسمان‌های باز پدیدار می‌شوند. سمت چپ شبکهٔ کاگومهٔ پیچیده به دور یک چنبره، به همراه ریسمان‌های انقباض‌ناپذیر.

که در آن، $A_v = \prod_{i\in v}\sigma_i^x$ و $B_p = \prod_{j\in p}\sigma_j^z$ به ترتیب عملگرهای رأس و وجه و متغیرهای i و j به ترتیب متعلق به مجموعهٔ رئوس مثلث‌ها و شش‌ضلعی‌های موجود در شبکه بوده و $\sigma^{x(z)}$

ماتریس‌های پائولی معمولی هستند. از آنجا کـه دو عملگـر رأس و وجـه تنهـا در تعـداد زوجـی از نقاط شبکه با یکدیگر اشتراک دارند همواره با یکدیگر جابه‌جا شـده $[A_v, B_p] = 0$ و هـامیلتونی (۱) حل تحلیلی دارد.

مجذور هر دو عملگر رأس و وجه برابر با ماتریس واحـد اسـت $(A_v)^2 = (B_p)^2 = \mathrm{I}$ و ویـژه مقادیر آن‌ها برابر با ± 1 است. با توجه به هامیلتونی (۱)، انـرژی حالـت پایـهٔ سیسـتم بـه ازای ویـژه مقادیر مثبت عملگرهای رأس و وجه برابر بـا $E = -JN_v - JN_p$ اسـت کـه در آن بـرای سیسـتم دارای $3\,N$ اسپین، $N_v = 2\,N$ بیانگر تعداد مثلث‌ها و $N_p = N$ نشاندهندهٔ تعداد شش ضـلعی‌هـای موجود در شبکه است.

با تعمیم دادن عملگرهای رأس و وجه می‌توان ریسمان‌هـای بسـته و بـاز را مطـابق شـکل ۱ در شبکه تعریف کرد که در واقع این ریسمان‌ها از اِعمال عملگرهای رأس و وجه بر روی حالت پایـه یا برانگیختهٔ سیستم حاصل شده و اندازه یا طول آن‌ها تحت تأثیر این عملگرها تغییرپذیر است.

حالت‌های دارای ویژه مقدار ۱− را حالت‌های برانگیختهٔ سیستم در نظر می‌گیریم، به طوری که هر برانگیختگی مقدار $2\,J$ انرژی برای سیستم هزینه دارد و برانگیختگی‌ها به صورت شبه ذرات در دو انتهای ریسمان‌های باز ظاهر می‌شوند. شبه ذرات برانگیختهٔ موجودْ رفتاری متفاوت بـا دو دسـتهٔ مشهور از ذرات یعنی فرمیون‌ها و بوزون‌ها دارند، به گونه‌ای که این ذرات از هیچ‌یک از آمارهای فرمی‌ـدیراک یا بوزـانیشتین تبعیت نمی‌کنند و آمار حاکم بر این نوع ذرات، آمـار کسـری بـوده و بدین جهت این ذرات را آنیون می‌نامند. این شبه ذرات به گروه تقارنی $\mathbb{Z}_2$ تعلق داشته و با استفاده از خواص متقابل منحصر به فرد آن‌ها می‌توان از آن‌هـا در سـاخت حافظـه‌هـای کوانتـومی یـا کـد کردن اطلاعات استفاده نمود.

در صورتی که هامیلتونی (۱) را بر روی یک سیستم با توپولوژی بدیهی مثـل یـک صـفحه یـا یک کره بررسی کنیم، حالت پایهٔ سیستم به صورت یکتا محاسبه خواهد شد. امـا در شـرایطی کـه مسئله را بر روی یک توپولوژی غیر بدیهی بررسی کنیم، برای مثال با شرط دوره‌ای بـودن صـفحهٔ مذکور آن را به دور یک چنبره مطابق شکل ۱ بپیچانیم، دیگـر حالـت پایـهٔ سیسـتم یکتـا نیسـت و تبهگنی چهارگانه خواهد داشت. در صـورت پیچیـدن شـبکهٔ دوبعـدی معرفـی‌شـده بـر روی یـک چنبره، سیستم دارای نظم توپولوژیک بوده و علاوه بر آن دو دسته عملگـر رشـته‌ای متعلـق بـه دو کلاس همشکلی چنبره را می‌توان بر روی آن تعریف کرد (شکل ۱) به گونه‌ای که این ریسمان‌هـا انقباض‌ناپذیر بوده و می‌توان از آن‌ها در کد کردن اطلاعات نیز استفاده نمود.

با مشخص شدن مدل مسئله در ادامه، مسئله را در حضور برهمکنش کوانتومی آیزینگ بررسی می‌کنیم. هامیلتونی مدل مطرح‌شده برای شبکهٔ کاگومه در معادلهٔ (۱) در حضور اخـتلال آیزینـگ برابر است با

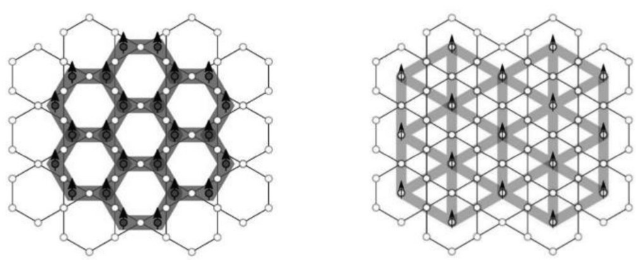
$$H = -J\sum_{v} A_v - J\sum_{p} B_p + j_x \sum_{<i,j>} \sigma_i^x \sigma_j^x \qquad (2)$$

که در آن، i و j به دو رأس همسایه بر روی شبکه اشاره داشته و $0 < j_x$ بیانگر قدرت اختلال آیزینگ است. در معادلهٔ (۲) عملگرهای رأس A_v با اختلال جابه‌جا می‌شود و ویژه مقادیر آن‌ها برابر با $1+$ است، در حالی که جملهٔ اختلالی با عملگرهای وجه B_p جابه‌جا نشده و هامیلتونی (۲) حل تحلیلی نخواهد داشت.

همانطور که پیش‌تر اشاره کردیم، سیستم ما در غیاب برهمکنش کوانتومی آیزینگ نظم توپولوژیک دارد، همچنین در شرایطی که $J = 0$ باشد سیستم تنها تحت تأثیر پتانسیل آیزینگ در فاز منظم خواهد بود. بدین ترتیب پیش‌بینی گذار فاز سیستم مابین این دو حد امری منطقی خواهد بود. برای این منظور، مسئله را در دو حد برهمکنش قوی $(J \ll j_x)$ و ضعیف $(J \gg j_x)$ اختلال آیزینگ بررسی می‌کنیم.

در حد برهمکنش ضعیف اختلال آیزینگ، خاصیت پادجابه‌جایی بین جملهٔ اختلالی و عملگر وجه B_p به برانگیختگی این عملگر و تغییر ویژه مقدار آن به $1-$ می‌انجامد. از آنجا که هر نقطه از شبکهٔ کاگومه با دو شش‌ضلعی همسایه است، تأثیر $\sigma_i^x \sigma_j^x$ در دو رأس مجاور i و j دو عملگر وجه را در شبکه برانگیخته می‌کند. با این توصیف می‌توانیم اثر اختلال آیزینگ را در شبکهٔ کاگومه به صورت تأثیر $\tau_i^x \tau_j^x$ در دو همسایه مجاور در یک شبکهٔ مثلثی دوگان همانند شکل ۲ تصور کنیم. همچنین می‌توان عملگرهای B_p را به صورت عملگرهای شبه اسپین τ^z واقع در مراکز شش‌ضلعی‌های شبکهٔ کاگومه (رئوس شبکهٔ مثلثی دوگان Λ) در نظر گرفت. با این فرضیات هامیلتونی (۲) به یک هامیلتوی مؤثر به صورت رابطهٔ زیر نگاشته می‌شود،

$$H = -JN_v - J\sum_{i\in\Lambda} \tau_i^z + j_x \sum_{<i,j>\in\Lambda} \tau_i^x \tau_j^x \qquad (3)$$



شکل ۱ سمت راست، شبکهٔ مثلثی Λ حاصل از اتصال مراکز شش‌ضلعی‌های موجود در شبکهٔ کاگومه. سمت چپ، شبکه دوگان شش ضلعی Γ که از اتصال مراکز مثلث‌های شبکهٔ کاگومه نتیجه شده است.

در حقیقت همان طور که در رابطهٔ (۳) دیده می‌شود این نگاشت هامیلتونی مسئله را شبیه به هامیلتونی مسئلهٔ برهمکنش کوانتومی آیزینگ در حضور میدان مغناطیسی عرضی بر روی شبکه مثلثی می‌کند.

در حد برهمکنش قوی اختلال آیزینگ از سوی دیگر، عملگر وجه در اسپین‌های موجود بر رئوس شش‌ضلعی‌های شبکه تأثیر کرده و سبب تغییر جهت اسپین‌ها می‌شود و بدین ترتیب در این حد، شبکهٔ کاگومه بر روی یک شبکهٔ دوگان شش‌ضلعی نگاشته می‌شود (شکل ۲). هامیلتونی مسئله در این مورد همانند رابطهٔ (۳) است تنها با این تفاوت که متغیرهای موجود در جمع‌ها متعلق به رئوس شبکهٔ دوگان شش‌ضلعی Γ هستند.

یادآوری این نکته حائز اهمیت است که در هریک از دو حد ضعیف و قوی، عملگرهای رأس A_v همواره ویژه‌مقدار $+1$ دارند و تغییر جهت‌های اسپینی در شبکه‌های دوگان همواره منوط به حفظ این شرط است. علاوه بر آن لازم است ذکر کنیم که نگاشت‌های حاصل تنها بیانگر طیف انرژی سیستم در حالت‌های مختلف بوده و در طی آن هرگونه اطلاعات در رابطه با تبهگنی سیستم از بین می‌رود.

۳. روش و نتایج

روش تبدیلات یکانی پیوسته اختلالی [۱۹] برای حل مسائلی که هامیلتونی آن‌ها دارای دو پیش شرط باشد به کار گرفته می‌شود: ۱. بخش غیر اختلالی هامیلتونی به صورت قطری دارای طیف انرژی با فواصل یکسان بوده و از پایین کراندار باشد، ۲. بخش اختلالی را بتوان به صورت $V = \sum T_n$ نوشت که در آن T_n بسته به اینکه $n < 0$ یا $n > 0$ باشد تعداد برانگیختگی‌های موجود را در سیستم افزایش یا کاهش می‌دهد.

در واقع، با استفاده از این روش، مسئلهٔ اولیه بر روی یک هامیلتونی مؤثر به شکل زیر نگاشته می‌شود

$$H_{eff} = Q + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \sum_{\overline{m}=0} C(m_1 \dots m_k) T_{m_1} \dots T_{m_k} \qquad (4)$$

که در آن Q عملگر شمارندهٔ تعداد شبه ذرات برانگیخته در سیستم است، جمع اول بر روی درجهٔ اختلال و جمع دوم بر روی تمام حالت‌های ممکن از مجموعه $\{m_1, m_2, \dots m_i\}$ زده می‌شود، که $m_i \in \{-N_{max}, \dots, N_{max}\}$ بوده به طوری که همواره شرط $\overline{m} = \sum m_i = 0$ برقرار باشد. ضرایب $C(m_1, \dots, m_k)$ به ازای مراتب مختلف اختلال برای N محاسبه شده و در معادله قرار می‌گیرند و عملگرهای T_n که در واقع مسبب نوسانات شبه ذرات برانگیخته موجود در سیستم

هستند و بر اساس نظریهٔ شاخه‌های پیوسته عمـل مـی‌کننـد. بـا اعمـال روش PCUT سـعی در یـافتن طیف انرژی حالت پایه و گاف سیسـتم در حضـور اخـتلال آیزینـگ در دو حـد بـرهمکنش قـوی ($j_x \gg J$) و ضعیف ($j_x \ll J$) می‌کنیم.

با فرض ($j_x \ll J$)، جملهٔ اول معادلهٔ (۳) با اختلال آیزینگ جابـه‌جـا شـده و همـواره مقـداری ثابت است لذا جملهٔ دوم این معادله را به عنوان هامیلتونی اولیـه در نظـر گرفتـه و از آنجـا کـه هـر برانگیختگی دربردارندهٔ $2J$ انرژی است، هامیلتونی اولیه دارای طیف انرژی با فواصل یکسان بوده و شرط لازم را برای به‌کارگیری روش Pcut برآورده می‌سازد. اختلال آیزینگ تعداد شبه ذرات را به اندازهٔ $n = \{0, \pm 1\}$ تغییر می‌دهد، از ایـن رو مـی‌تـوان هـامیلتونی مسـئله را بـه صـورت زیـر نوشت

$$\frac{H}{۲J} = -\frac{N}{۲} + Q + \frac{j_x}{۲J}(T_{-2} + T_0 + T_{+2}) \tag{5}$$

که در آن، عملگر $Q = \sum_i b_i^\dagger b_i$ شمارندهٔ تعداد اسپین‌های معکوس‌شده در شبکه بـوده و عملگـر T برابر است با

$$\begin{aligned} T_0 &= \sum_{<i,j>} b_i b_j^\dagger + b_i^\dagger b_j \\ T_{+2} &= \sum_{<i,j>} b_i^\dagger b_j^\dagger = (T_{-2})^\dagger \end{aligned} \tag{6}$$

که در آن، $b_i^\dagger(b_i)$ عملگر خلق (فنای) اسپین‌های معکوس‌شده در رأس i است.

در حضور اختلال، شبه ذراتْ بسته به مرتبهٔ اخـتلال بـر روی سیسـتم جهـش مـی‌کننـد. انـرژی حالت پایه به ازای هر رأس و گاف در حالت حضـور یـک ذرهٔ برانگیختـه در سیسـتم را بـا فـرض $J = 1$ تا مرتبهٔ ۸ اختلال محاسبه کرده‌ایم،

$$\begin{aligned} \epsilon_0^l &= -1 - \frac{1}{4}j_x^2 - \frac{1}{4}j_x^3 - \frac{29}{64}j_x^4 - \frac{33}{32}j_x^5 - \frac{713}{256}j_x^6 - \frac{2105}{256}j_x^7 \\ &\quad - \frac{42667}{16384}j_x^8 \\ \Delta^l &= 2 - 6j_x - 6j_x^2 - \frac{21}{2}j_x^3 - \frac{63}{2}j_x^4 - \frac{3153}{32}j_x^5 - \frac{44379}{128}j_x^6 - \frac{2570661}{2048}j_x^7 \\ &\quad - \frac{9821055}{2048}j_x^8 \end{aligned} \tag{7}$$

جهت دستیابی به درک جامعی از مسئله در ادامهٔ کار، حالـت بـرهمکنش قـوی را نیـز بررسـی می‌کنیم. در حالتی که ضریب اختلال آیزینـگ بزرگتـر از ضـریب J باشـد ($j_x \gg J$)، تـأثیر ایـن جمله بسیار پر رنگ‌تر ظاهر شده و بدین طریق می‌توان عملگر وجه در سیسـتم را بـه عنـوان جملـهٔ

اختلال در نظر گرفت. در این حد، جملهٔ سوم رابطهٔ (۳) را بـه عنـوان هـامیلتونی اولیـهٔ H_0 در نظـر گرفته و با توجه به اینکه این هامیلتونی شرایط روش PCUT را برآورده می‌کند مـی‌تـوانیم در ایـن حالت نیز از این روش اقدام به حل مسئله کنیم. انتخاب متفاوت حالت اولیـه و پتاسـیل اخـتلال در این حالت به تغییراتی در روند حل مسئله می‌انجامد، به نحوی که تأثیر عملگر وجه در حالـت پایـهٔ سیستم سبب وارونگی شش اسپین مجاور خود در رئـوس یـک شـش‌ضـلعی در شـبکه مـی‌شـود و شبکهٔ دوگان به صورت یک شبکهٔ لانه‌زنبوری به دست می‌آید (شکل ۲).

در حد برهمکنش قوی مجموعه تغییرات مجاز در تعداد شبه ذرات برابر بـا $n = \{0, \pm 3, \pm 6\}$ بوده و هامیلتونی مؤثر به شکل زیر است

$$\frac{H}{2j_x} = -\frac{N}{6} + Q + \frac{J}{2j_x} \sum_{n=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6\}} T_n \tag{8}$$

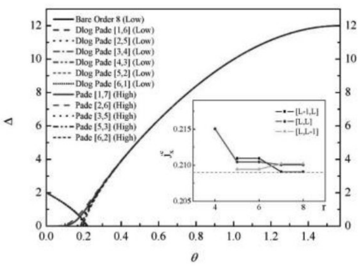
با قرار دادن $j_x = 1$، انرژی حالت پایه به ازای هر رأس از شـبکه و گـاف سیسـتم در حضـور یک برانگیختگی را تا مرتبهٔ ۸ اختلال در این حد محاسبه کردیم

$$\epsilon_0^h = -1 - \frac{1}{36}J^2 - \frac{1}{25920}J^4 - \frac{17}{32659200}J^6 + \frac{13125809}{5530639564800}J^8$$

$$\Delta^h = 12 - \frac{1}{3}J^2 - \frac{4}{216}J^4 + \frac{1865597}{13934592000}J^6 + \frac{884230618396843}{117986977382400000}J^8 \tag{9}$$

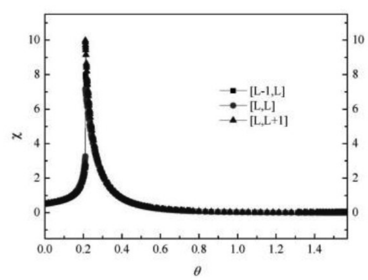
با توجه به اینکه نتایج حاصل به دلیل مرتبهٔ اختلال محدودیت دارند، برای درک بهتر، نتایج را با استفاده از روش Pade و Dlog Pade برون‌یابی می‌کنیم.

پس از محاسبهٔ سری‌های گاف در دو حـد بـرهمکنش قـوی و ضـعیف آیزینـگ، نتـایج را بـا یکدیگر ادغام کـرده و رفتـار کلـی سیسـتم را در یـک نمـودار مطالعـه مـی‌کنـیم. بـرای ایـن کـار $J = \cos\theta$ و $j_x = Sin\ \theta$ در نظـر گرفتـه و گـاف کلـی سیسـتم را در قالـب تـابعی از θ بـرای سری‌های ساده و برون‌یابی شده در شکل ۳ رسم کـرده‌ایـم. همـانطور کـه در ایـن شـکل مشـاهده می‌کنید، نمودار گاف در هر دو حد تقریباً در نقطهٔ $\theta^c \sim 0.21$ بسته می‌شود که نشان‌دهندهٔ تغییـر فاز کوانتومی در $j_x \sim 0.208$ است. همانطور که در بخـش دوم توضـیح دادیـم مـدل کیتـائف بـر روی شبکهٔ کاگومه در حضور پتانسیل آیزینگ به مدل آیزینگ بـر روی شـبکهٔ مثلثـی در حضـور میدان مغناطیسی عرضی نگاشته می‌شود، که این امر خود به نحوی صـحت نتـایج حاصـل را تأییـد می‌کند [۲۰].



شکل ۲ نمودار کلی گاف تک‌ذره‌ای در دو حد برهمکنش قوی و ضعیف آیزینگ بر حسب θ، نمودار داخلی نشان‌دهندهٔ تقریب Dlog Pade حد بحرانی برهمکنش آیزینگ بر حسب مرتبهٔ اختلال است: L=[r-r mod 2]/2 و r مرتبهٔ اختلال است.

با استفاده از قضیهٔ هلمن-فاینمن می‌توانیم پذیرفتاری انرژی حالت پایه را با استفاده از انرژی حالت پایهٔ سیستم از رابطهٔ $\chi = -\frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial^2 j_x}$ محاسبه کنیم. شکل ۴ نمودار پذیرفتاری حالت پایهٔ سیستم را بر اساس تابعی از θ نشان می‌دهد و همانطور که انتظار می‌رود پرش نمودار در نقطهٔ مشابهی که گاف بسته شده اتفاق می‌افتد که این امر بیانگر تغییر فاز مرتبهٔ دوم در سیستم است.



شکل ۳ نمودار کلی تقریب Dlog Pade پذیرفتاری برهمکنش آیزینگ در دو حد قوی و ضعیف بر حسب θ: L=[r-r mod 2]/2 و r مرتبهٔ اختلال است.

اشاره به این مطلب حائز اهمیت است که ساختار شبکه و اختلال حاکم بر آن در تعیین نقاط بحرانی بسیار تأثیرگذار خواهد بود. برای مثال، می‌توان به مقایسهٔ نتایج حاصل با مرجع [۱۶] بپردازیم به طوری که در [۱۶] مسئلهٔ کد رنگی بر روی شبکهٔ لانه‌زنبوری در حضور میدان مغناطیسی به عنوان اختلال نیز به صورت مدل آیزینگ بر روی شبکهٔ دوگان مثلثی نگاشته می‌شود، تنها با این تفاوت که در آن تعداد شبه ذرات را به صورت $n = \{\pm 1, \pm 3\}$ تغییر می‌دهیم. این امر به مقاومت کد رنگی در برابر اختلال خارجی (میدان مغناطیسی) می‌انجامد به طوری که گذار فاز در $\theta^c \sim 0.367$ اتفاق می‌افتد. این سؤال را که چرا مدل شبکهٔ کاگومه را مطالعه کرده‌ایم،

می‌توان چنین پاسخ داد که مواردی با ساختار شبکهٔ کاگومه گزارش شده‌اند [۲۱, ۲۲] در حالی که تا کنون نمود حقیقی برای شبکهٔ مورد استفاده در مراجع [۱۱] و [۱۶] گزارش نشده است.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، ما خواص طیفی انرژی پایین مدل کیتائف را بر روی شبکهٔ کاگومه در حضور اختلال آیزینگ بررسی کردیم. برای این کار انرژی حالت پایه و گاف را در دو حد برهمکنش ضعیف و قوی آیزینگ با استفاده از روش تبدیلات یکانی پیوستهٔ اختلالی محاسبه کرده و سپس رفتار گاف و پذیرفتاری حالت پایهٔ سیستم را بررسی کردیم. نتایج حاصل در تطابق با نتایج موجود جهت مدل دوگان مسئله یعنی مدل آیزینگ در حضور میدان مغناطیسی موازی بوده و نشان‌دهندهٔ تغییر فاز مرتبهٔ دوم سیستم از فاز توپولوژیک به فاز منظم است.

منابع

[1] Landau, L. and E. LIFSCHITZ, *Second order phase transitions.* Phys. Z. Sowjet, 1937. **11**: p. 545-563.

[2] Tsui, D.C., H.L. Stormer, and A.C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit.* Physical Review Letters, 1982. **48**(22): p.۱۵۵۹ .

[3] Wen, X.-G., *Mean-field theory of spin-liquid states with finite energy gap and topological orders.* Physical Review B, 1991. **44**(6): p. 2664.

[4] Chen, X., Z.-C. Gu, and X.-G. Wen, *Complete classification of one-dimensional gapped quantum phases in interacting spin systems.* Physical review b, 2011. **84**(23): p. 235128.

[5] Wen, X.-G., *Topological orders in rigid states.* International Journal of Modern Physics B, 1990. **4**(02): p. 239-271.

[6] Wen, X.-G., *Chiral Luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum Hall states.* Physical Review B, 1990. **41**(18): p. 12838.

[7] Rokhsar, D.S. and S.A. Kivelson, *Superconductivity and the quantum hard-core dimer gas.* Physical review letters, 1988. **61**(20): p. 2376.

[8] Kalmeyer, V. and R. Laughlin, *Equivalence of the resonating-valence-bond and fractional quantum Hall states.* Physical review letters, 1987. **59**(18): p. 2095.

[9] Kitaev, A.Y., *Fault-tolerant quantum computation by anyons.* Annals of Physics, 2003. **303**(1): p. 2-30.

[10] Wen, X.-G., *Topological orders and Chern-Simons theory in strongly correlated quantum liquid.* International Journal of Modern Physics B, 1991. **5**(10): p. 1641-1648.

[11] Bombin, H. and M.A. Martin-Delgado, *Topological quantum distillation.* Physical review letters, 2006. **97**(18 :(p. 180501.

[12] Chen, H.-D. and Z. Nussinov, *Exact results of the Kitaev model on a hexagonal lattice: spin states, string and brane correlators, and anyonic excitations.* Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008. **41**(7): p. 075001.

[13] Xu, W–.T. and G.-M. Zhang, *Tensor network state approach to quantum topological phase transitions and their criticalities of Z 2 topologically ordered states.* Physical Review B, 2018. **98**(16): p. 165115.

[14] Xu, W.-T. and G.-M. Zhang, *Matrix product states for topological phases with parafermions.* Physical Review B, 2017. **95**(19): p. 195122.

[15] Scheurer, M.S., et al., *Topological order in the pseudogap metal.* Proceedings of the National Academy of Sciences, 2018. **115**(16): p. E3665-E3672.

[16] Jahromi, S.S., et al., *Robustness of a topological phase: Topological color code in a parallel magnetic field.* Physical Review B, 2013. **87**(9): p. 094413.

[17] Dusuel, S., et al., *Robustness of a perturbed topological phase.* Physical review letters, 2011. **106**(10): p. 107203.

[18] Levin, M.A. and X.-G. Wen, *String-net condensation: A physical mechanism for topological phases.* Physical Review B, 2005. **71**(4): p. 045110.

[19] Knetter, C. and G.S. Uhrig, *Perturbation theory by flow equations: dimerized and frustrated S= 1/2 chain.* The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, 2000. **13**(2): p. 209-225.

[20] He, H.-X., C. Hamer, and J. Oitmaa, *High-temperature series expansions for the (2+ 1)-dimensional Ising model.* Journal of Physics A: Mathematical and General :(۱۰)۲۳ .۱۹۹۰ ,p. 1775.

[21] Helton, J., et al., *Spin dynamics of the spin-1/2 kagome lattice antiferromagnet ZnCu 3 (OH) 6 Cl 2.* Physical review letters, 2007. **98**(10): p. 107204.

[22] Okamoto, Y., H. Yoshida, and Z. Hiroi, *Vesignieite BaCu3V2O8 (OH) 2 as a candidate spin-1/2 kagome antiferromagnet.* Journal of the Physical Society of Japan, 2009. **78**(3): p. 033701-033701.