Research Paper

Modified Clutton-Brock Basis Potential Functions in MOND Formulation

Narges Fathalian[1]

Received: 2019.01.01
Accepted: 2020.01.25

Abstract

In this paper a set of basis potential functions is introduced which could be used in expanding the MONDian potentials of razor-thin galactic disks. We modify Clutton-Brock basis potential functions in Milgrom's formulation of Modified Newtonian Dynamics (MOND), for razor-thin galactic disks. Then, we use these new modified basis functions to expand modified potential functions of Kuzmin and exponential disks. We calculate expansion coefficients and Kouchi convergence to show that the MONDian potential functions expansions of these two sample disks, versus modified Clutton-Brock basis potential functions, with limited increase of expansion's terms (up to 30 terms), converge to the exact values of their potentials. Therefore, Modified Clutton-Brock basis potential functions could be used as a set of basis functions for expansion of other MONDian potential functions of razor-thin galactic disks. These basis functions could also be applicable in simulations and codes which are used to study the dynamics of disk galaxies, especially in the methods like N-body simulations and particle mesh.

Keywords: *Clutton-Brock Basis Potential Functions, MOND, Rotation Curve of Spiral Galaxies*

---

[1] Physics Department, Basic Sciences, Payam-e Nour University, Tehran, Iran.
(Corresponding Author). narges.fathalian@gmail.com

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال نهم، پیاپی ۱۷، تابستان ۱۳۹۸

مقاله پژوهشی

توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون ـ براک در فرمول‌بندی MOND[1]

نرگس فتحعلیان[2]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۰/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۵

چکیده

در این مقاله مجموعه‌ای از توابع پتانسیل پایه معرفی می‌شود که در بسط پتانسیلِ تعمیم‌یافتهٔ نیوتنی دیسک‌های نازک کهکشانی به‌کار می‌رود. در اینجا توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک را در دینامیک تصحیح‌شدهٔ نیوتنی، برای دیسک‌های نازک کهکشانی بازسازیمی کنیم. سپس با استفاده از این توابع پایهٔاصلاح‌شدهٔ جدیدْ توابع پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک‌های کوزمین و نمایی را بسط می‌دهیم و با محاسبهٔ ضرایب بسط و همگرایی کوشی نشان می‌دهیم که بسط توابع پتانسیل MONDی برای این دو دیسک نمونه، بر حسب توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک با شمار محدودی از جملات بسط (تا ۳۰ جمله) به مقدارِ دقیق پتانسیل آن‌ها همگرا می‌شود. بنابراین می‌توان توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراکرا به عنوان مجموعهٔ توابع پایه برای بسط دیگر توابع پتانسیل MONDی برای دیسک‌های نازک کهکشانی به کار برد. این توابع پایه همچنین در شبیه‌سازی‌ها و کدهایی که برای مطالعهٔ دینامیک دیسک‌های کهکشانی به

---

[1] DOI: 10.22051/jap.2020.23847.1112

[2] استادیار فیزیک، دانشگاه پیام نور، دانشکدهٔ فیزیک، صندوق پستی ۱۹۳۹۵–۳۶۹۷، تهران، ایران.
narges.fathalian@gmail.com

کار می‌روند به ویژه در روش‌هایی چون شبیه‌سازی N-body و particle mesh کاربرد دارند.

واژگان کلیدی: *توابع پایهٔ پتانسیل‌کلاتون‌ـ براک، MOND، منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی.*

مقدمه

مسئلهٔ‌منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچی نخستین بار در سال ۱۹۷۰ مطرح شد. پس از آن طی سال‌های ۱۹۷۹ تا ۱۹۸۵ بیش از ۷۰ منحنی چرخش معتبر از کهکشان‌های مارپیچی تا شعاع‌های زیاد منتشر شد و تقریباً در تمامی آن‌ها، برخلاف انتظارِ حاصل از دینامیکِ نیوتنی، منحنی چرخش تا آخرین نقطهٔ اندازه‌گیری‌شده مسطح است یا به کندی تغییر می‌کند. اغلبِ نوری که ما از یک کهکشان مارپیچی دریافت می‌کنیم از دیسکِ نازکِ آن می‌آید که به‌نظر می‌رسد به معنای آن باشد که تحلیلِ دینامیک دیسک می‌تواند قسمت عمدهٔ تحلیل کهکشان باشد. از این رو داشتنِ جواب‌های تحلیلیِ دقیق یا حتی تقریبی برای پتانسیلِ دیسک‌های کهکشانی بسیار مفید خواهد بود و با استفاده از آن ایده‌های گوناگون، آزمایش‌پذیرند. مهم‌ترین مسئلهٔ قابل بررسی با این جواب‌ها محاسبهٔ منحنی چرخش تعمیم‌یافتهٔ دیسک‌های کهکشانی است. با توجه به بزرگ بودنِ شعاع دیسک در مقابلِ ضخامت آن، می‌توانیم از ضخامتش صرف‌نظر کنیم. پس ما مدل دیسک نازک (بدون برآمدگی) را در نظر می‌گیریم. همچنین ما بررسیِ خود را به دیسک‌های دارای تقارن محوری محدود می‌کنیم.

در بررسی مسئلهٔ منحنی چرخش کهکشانی، همزمان با طرح کاندیداهای ماده تاریک، رویکردهایی مبنی بر تصحیح قانون نیوتن نیز صورت گرفت. یکی از این رویکردها از آنِ میلگرام در سال ۱۹۸۳بود که به تئوریتعمیم دینامیک نیوتنی (MOND[1]) معروف است (میلگرام a و b ،۱۹۸۳). معادلهٔ پواسون تعمیم‌یافتهٔ میلگرام که تعمیم معادلهٔ پواسون نیوتنی است معادله‌ای غیر خطی است و حل تحلیلی آن ـ جز برای حالت‌های ساده و خاص ـ بسیار دشوار است. ما در این مقاله در بخش اولابتدا نظریهٔ MOND را که توسط میلگرام پیشنهاد شده است معرفی می‌کنیم و شیوهٔ برادا و میلگرام(برادا و میلگرام، ۱۹۹۵) را که شکل MONDی پتانسیل‌های دیسک‌های کوزمین و نمایی را به دست آوردند، به طور مختصر توضیح می‌دهیم. سپس در بخش دوم، توابع پتانسیل پایه کلاتون‌ـبراک (CB) را –که از حل معادلهٔ لاپلاس درمختصات دوکره‌ای[2] به دست می‌آیند– معرفی کرده و بر اساس فرمول‌بندی MOND بازسازی می‌کنیم. در این روش با محاسبات

---

[1] Modified Newtonian Dynamics
[2] Bispherical

عددی پایه‌های جدید پتانسیل کلاتون‌براکرا در فرمول‌بندی MOND به دست می‌آوریم. در بخش سوم، از توابع تعمیم‌یافتهٔ حاصل، برای بسط توابع پتانسیل MONDی دیسک کوزمین و نمایی استفاده می‌کنیم. با محاسبهٔ ضرایب بسط و همگرایی کوشی نشان می‌دهیم که این بسط‌ها همگرا هستند. بدین معنا که بسط توابع پتانسیلِ تعمیم‌یافتهٔ دیسک‌های کوزمین و نمایی، بر اساس توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ CB، با افزایش محدودِ جملاتِ بسط (تا ۳۰ جمله) به مقدار دقیقِ پتانسیلِ مزبور همگرا می‌شود. از این رو، توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌براک،توابع پایهٔ مناسبی برای بسط پتانسیل‌های MONDبرای دیسک‌های نازک و بدون برآمدگی با تقارن محوری، به‌نظر می‌رسند.

۱. نظریهٔ تعمیم دینامیک نیوتنی

برای حل مسئلهٔ منحنی چرخش کهکشانی، همزمان با طرح کاندیداهای مادهٔ تاریک،نظریه‌هایی مبنی بر تصحیح قانون نیوتن نیز پیشنهاد شدند. اصول این نظریه‌ها بر این است که مادهٔ تاریکی وجود ندارد یا مادهٔ تاریک نامزد اصلی جرم دینامیکی نیست بلکه قانونی که ما به وسیلهٔ آن جرم را محاسبه می‌کنیم درست نیست. در این راستا میلگرام در سال ۱۹۸۳ تئوری تعمیم دینامیک نیوتنی (MOND) را مطرح کرد (میلگرام aو b، ۱۹۸۳).بر اساس این نظریه، انحراف از قانون نیوتن در شتاب‌های پایین صورت می‌گیرد[1]. او پیشنهاد کرد که مقیاس شتابیاز مرتبهٔ $10^{-8}\mathrm{cm/s^2}$ وجود دارد که ثابتی جهانی است و آنرا از رابطهٔ تالی-فیشر(Tully-Fisher) بهدست آورد. طبق این نظریه شتاب ذره‌ای به جرم m که تحت نیروی F باشد، از این رابطه بهدست می‌آید (سندرز و مک‌گاگ، ۲۰۰۲):

$$Mg_n = F \tag{۱}$$

که در آن

$$\mu(x) = 1 \qquad \vec{g}_N = \vec{g}\mu(|g|/a_0) \tag{۲}$$

وg شتاب نیوتنی است و $\mu(x) = x$ برای $x \ll 1$ و $\mu(x) = 1$ برای $x \gg 1$ و $a_0 \simeq 10^{-8}\mathrm{cm/s^2}$. در حد شتاب‌های پایین خواهیم داشت

$$g_N = g\mu(|g|/a_0) \xrightarrow{a \ll a_0} g = \sqrt{g_N a_0} = \frac{v^2}{r} \rightarrow v^4 = Gma_0$$

[1] این نظریه و واقعیت‌های آن حتی برخی افراد را به این سمت سوق داد که هاله‌ی کهکشانی (در مدل ماده تاریک) را با مقیاس شتاب بازتولید کنند. برای مثال نگاه کنید به ون دن بوش و دالاکانتون، ۲۰۰۰.

که رابطهٔ تالی-فیشر را به دست می دهد ($v_\infty = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}$).

پارامتر $\xi \equiv \frac{MG}{h^2 a_0}$ معیاری از این است که در چه عمقی از ناحیهٔ MOND هستیم. به ازای ξهای بسیار بزرگ در ناحیهٔ نیوتنی هستیم و لذا منحنی چرخش تعمیم‌یافته نسبت به منحنی چرخش نیوتنی اختلاف چندانی نشان نمی‌دهد. به ازای ξهای بسیار کوچک در ناحیهٔ MOND هستیم و منحنی چرخش تعمیم یافته نسبت به منحنی چرخش نیوتنی اختلاف چشم‌گیری را نشان می‌دهد. (برای مشاهدهٔ منحنی چرخش های تعمیم یافتهٔ دیسک نمایی به ازای مقادیر مختلفِ ξ نگاه کنید به میلگرامb، ۱۹۸۳).

در نظریهٔ MOND، معادله پواسون بدین شکل تصحیح می شود (میلگرام، ۲۰۱۵):

$$\nabla.[\mu(|\nabla\psi|/a_0)\nabla\psi] = 4\pi G\rho \qquad (۳)$$

حل تحلیلی این معادلهٔ غیر خطی در حالت کلیبسیار دشوار است. اما داشتن جواب‌های تقریبی یا دقیق برای میدان گرانشی مدل‌های دیسک کهکشانی در محاسبهٔ منحنی چرخش MONDی دیسک‌های کهکشانی بسیار مفید خواهد بود. برادا و میلگرام در ۱۹۹۵ جواب‌های معادلهٔ فوق را به‌طور دقیق برای دیسک کوزمین و با تقریب بسیار خوب برای دیسک نمایی به دست آوردند که منحنی‌های حاصل به‌طور جانبی مسطح هستند (برادا و میلگرام، ۱۹۹۵).

پیروی روشبرادا و میلگرام ۱۹۹۵، شتاب گرانشی تعمیم‌یافته، g، با شتاب نیوتنی g_N، طبق رابطهٔ۲ مرتبط است کـه در آن $g_N = -\nabla\varphi_N$، (φ_N پتانسیل نیـوتنی اسـت) و $g = -\nabla\psi$، (ψ، پتانسیل تعمیم یافته) است و لذا

$$\nabla\varphi_N = \mu(|\nabla\psi|/a_0)\nabla\psi \qquad (۴)$$

این معادله روش خوبی را برای حل معادلهٔ(۳) پیشنهاد می‌کند. از آنجا که تابع μ که در MOND ظاهر می‌شود به شکلی است که $I(x) = x\mu(x)$، تابعی یک‌به‌یک است و همراه تغییر x بین صفر تا بی‌نهایت تغییر می کند، لذا تابع $I(x)$بر محور مثبت xها معکوس‌پذیر است. پس ابتدا معادلهٔ پواسون را برای φ_N حل می کنیم و سپس با معکوس کردنِ رابطهٔ۴ به میدان MOND می‌رسیم: $\nabla\psi = \nu(|\frac{\nabla\varphi_N}{a_0}|)\nabla\varphi_N$، که در آن $\nu(y) = I^{-1}(y)/y$. پس با داشتن تابع پتانسیل نیوتنی φ_N، شتاب نیوتنی g_N به دست آمده و با داشتنِ آنشتاب MOND را محاسبه می‌کنیم (برای جزئیات بیشتر در اینباره ر.ک. برادا و میلگرام، ۱۹۹۵). فرمول زیر رابطهٔشتاب MOND را نشان می‌دهد:

$$\vec{g} = -\nabla\psi = a_0 I^{-1}(g_n/a_0)\frac{\vec{g}_n}{g_n} \qquad (۵)$$

تابع میانیابی $\mu(x)$را تابعی در نظر می گیریم که میلگرام در ۱۹۸۳ پیشنهاد کرده است (میلگرامa، ۱۹۸۳)،

$$\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{۶}$$

و در نهایت سرعت تعمیم‌یافته از رابطهٔ $v^2(r) = rg$ محاسبه می‌شود.

برادا و میلگرام ۱۹۹۵، به کمک این روش، پتانسیل‌های تعمیم‌یافتهٔ دیسک‌های کوزمین و نمایی را به دست آوردند. ما در قسمت بعد روش مذکور را برای بازسازی شکل نیوتنی توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک به کار برده و شکل MONDی این توابع را به طور عددی به‌دست می‌آوریم. سپس نشان می‌دهیم که می‌توان شکل MONDی پتانسیل دیسک کوزمین و نمایی را با بسطی همگرا از توابع پتانسیل پایهٔ‌تعمیم‌یافتهٔ کلاتون‌ـبراک به‌دست آورد و از این رو توابع MONDی پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک برای بسط شکل MONDی هر منحنی چرخش مسطحی مفید به‌نظر می‌رسد.

۲. توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایه کلاتون‌ـبراک

پتانسیل‌های حاصل از چشمه‌های تصویری برای به دست آوردن روابط چگالی‌ـپتانسیل به کار می‌روند و برای به‌دست آوردن پتانسیل کهکشان‌های مسطح کاربرد دارند. یکی از این نوع پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های پایهٔ کلاتون‌ـبراک هستند که از حل معادلهٔ لاپلاس در مختصات دوکره‌ای به دست می‌آیند. این توابع برای اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط کلاتون‌ـبراک به شکل توابع دو به دو متعامد پتانسیل‌ـچگالی برای پتانسیل گرانشی و چگالی سطحی کهکشان‌های مسطح با اندازهٔ نامحدود معرفی شدند (کلاتون‌ـبراک، ۱۹۷۲).کلاتون‌ـبراک در ۱۹۷۲ برای مجموعهٔ توابعش تنها روابط بازگشتی ارائه داده بود. او این توابع را با بهکار بردن روش تبدیل هنکل که توسط تومره (تومره، ۱۹۶۳) به توابع لژاندر گسترش داده شدهبود، بهدست آورد. کلنجز پس از مشاهدهٔ کار کلاتون‌ـبراک توانست این توابع را از فرمول‌بندی مارپیچی لگاریتمیَش بهدست آورد (کلنجز، ۱۹۷۶).آاوکی و آی در ۱۹۷۸ دریافتند که این مجموعه توابع دو به دو متعامد فرم ساده‌ای بر حسب توابع لژاندر دارند (آاوکی و آی، ۱۹۷۸). آاوکی و همکاران‌اش در ۱۹۷۹ این مجموعه از توابع را برای محاسبهٔ مدهای نوسانات کهکشان‌های مسطح مفید یافتند (آاوکی و همکاران، ۱۹۷۹). هانتر در ۱۹۸۰ نشان داد، مجموعهٔ نتایج توابع چگالی و پتانسیل مستقیماً و بهسادگی با استفاده از مختصات دو کره‌ای به دست می‌آیند(هانتر، ۱۹۸۰؛ برای مطالعهٔ مختصات دوکره‌ای، مورس و فشباخ ۱۹۵۳ را ببینید).

مختصات دوکره‌ای از مختصات دوقطبی به‌دست می‌آید. مختصات دوقطبی، مختصات مناسب دو استوانهٔ موازی یا یک استوانه با شعاع محدود موازی یک صفحه است. این مختصات را

می‌توانیم با فرض تابع مختلطی کـه از آن پتانسـیل دوبـار خطـی متضـاد (در راسـتای محـور X) در فاصلهٔ $2a$ حاصل می‌شود به‌دست آوریم کـه در آن $\omega = \ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] = 2\tanh^{-1}(\frac{x}{a})$. بـا قـرار دادن $\omega = \mu + i\eta$ و $x = z + iy = a\tanh(\frac{\omega}{2})$ خــواهٔم داشــت $z + iy = a\frac{1-e^{-\omega}}{1+e^{-\omega}}$. در نتیجــه، کــه $z = \frac{a\,sinh\mu}{cosh\mu - cos\eta}; y = \frac{a\,sin\eta}{cosh\mu - cos\eta}; \mu = tanh^{-1}\left(\frac{2az}{a^2+z^2+y^2}\right); \eta = tan^{-1}(\frac{2ay}{a^2-z^2-y^2})$ در آن $r = \sqrt{z^2+y^2} = a\sqrt{\frac{sinh^2\mu + sin^2\eta}{(cosh\mu - cos\eta)^2}}; \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{z}\right) = tan^{-1}(\frac{sin\eta}{sinh\mu})$. مختصات η بین صفر و 2π تغییر می‌کند. مختصات μ شعاعی است و بازه $(-\infty,\infty)$ را می‌پوشاند و بین $(0,\infty)$ نیمهٔ مثبت صفحهٔ z-y را می‌دهد. منحنی‌هایی با μ یا η ثابت دوایری در فضای z-y هسـتند. اکنـون مختصات دوکره‌ای با چرخش محورهای مختصات دوقطبی حول عمود منصف خط بین دوقطب به دست می‌آید. مختصات‌ها و معادلهٔ لاپلاس در این مختصات به این شکل است:

$$z = \frac{a\,sinh\mu}{cosh\mu - cos\eta}; x = \frac{a\,sin\eta\,cos\theta}{cosh\mu - cos\eta}; y = \frac{a\,sin\eta\,sin\theta}{cosh\mu - cos\eta}; r = \frac{a\,sin\eta}{cosh\mu - cos\eta};$$
$$h_\mu = h_\eta = \frac{a}{cosh\mu - cos\eta}; \; h_\theta = \frac{a\,sin\eta}{cosh\mu - cos\eta};$$
$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_\mu{}^3}(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_\mu sin\eta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \frac{h_\theta}{sin^2\eta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}); \tag{۷}$$

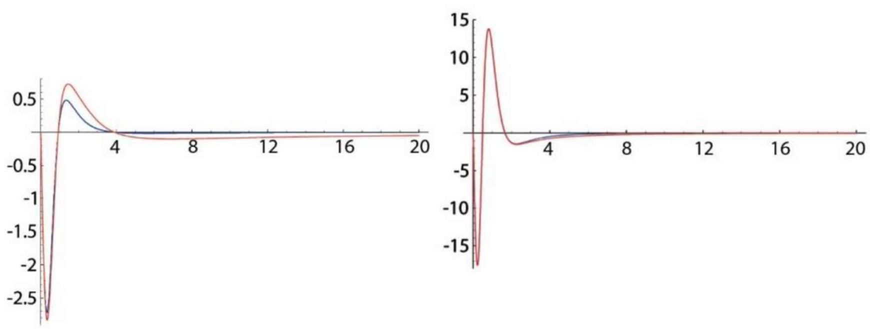
که در آن، μ بین $(-\infty,\infty)$، η از صفر تا π و θ از صفر تا 2π تغییر می‌کند. مورس و فشباخ (۱۹۵۳) نشـان دادنـد کـه معادلـهٔ لاپلاسـی فـوق در مختصـات دوکـره‌ای تفکیـک مـی‌شـود (مـورس و فشباخ،۱۹۵۳). با حل این معادلهٔ لاپلاس در مختصات دوکـره‌ای پتانسـیل‌هـای پایـهٔ کلاتون‌ـبـراک بهدست می‌آیند (برای جزئیات بیشتر هانتر، ۱۹۸۰ را ببینید). فرمول‌بندی نیوتنیِ توابع پتانسـیل پایـه کلاتون‌ـبراک چنین است (آاوکی و آی، ۱۹۷۸):

$$\begin{aligned} \phi_n^m &= -\frac{GM}{\tilde{R}}(\frac{a}{a+|z|})^n \sum_{j=0}^{n-m}\frac{(n+m)!}{j!(n+m-j)!}(\frac{|z|}{a})^j P_{n-j}^m(\tilde{\xi})\exp(im\theta) \\ \tilde{R} &= [r^2 + (a+|z|)^2]^{1/2} \\ \tilde{\xi} &= [r^2 - (a+|z|)^2]/\tilde{R}^2 \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن، M جرم و G ثابت گرانش است. P_n^mها توابـع وابسـتهٔ لژانـدر هسـتند کـه در آن m و n اعداد صحیح نامنفی‌اند به شکلی که $m \le n$ و a پارامتر طول آزاد است. در محاسبات خود مقدار شتابِ MOND را مشابه کار برادا و میلگرام (۱۹۹۵) مقدار $a_0 = 1.2\times10^{-8}\, cm/s^2$ در نظـر گـرفتیم. پارامتر a را که مقیاس طول است، شعاع کهکشان دیسکی نوعی، برابر شعاع کهکشان راه شیری در نظر گرفتیم.

با استفاده از این توابع (روابط فوق) و با دنبال کردنِ همانِ مراحلِ قسـمت قبـل (ماننـد دیسـک نیوتنی و کوزمین)، توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایـهٔ کلاتون‌ـبـراک، ψ_n^mهـا، را بـه دسـت مـی‌آوریـم

($g_n^m = -\nabla\psi_n^m$). در محاسباتِ خود حالتِ بدون اختلال را در نظر گرفته و مقدار θ را برابر صفر می‌گیریم. همچنین پس از محاسبهٔ مؤلفه‌های مربوط به گرادیان و انجام محاسبات مربوط، در مرحلهٔ آخر ضخامت دیسک را صفر در نظر می‌گیریم، $z = 0$. بدین ترتیب شکل تعمیم‌یافتهٔ توابع پایهٔ کلاتون‌براک (اعم از شتاب و پتانسیل) را به‌دست می‌آوریم. تمام کدهای این مقاله را در نرم‌افزار MATHEMATICA نوشتیم و منحنی‌های مربوط را نیز در همان محیط رسم کردیم. در شکل ۱، برای نمونه منحنی‌های بی‌بُعد شتاب‌های نیوتنی، (رنگ آبی) و MOND (رنگ قرمز)، g_N/a_0 و g/a_0 را برای دو مد متفاوت (مد m=0 , n=2 سمت راست و مد m=2 , n=3، سمت چپ) بر حسب فاصله از مرکز کهکشان (شعاع) رسم کرده‌ایم. مقادیر شعاع را به شعاع دیسک کهکشانِ نوعی بهنجار کرده‌ایم. کهکشان نوعی را کهکشان راه شیری در نظر گرفتیم. در شکل ۱، اختلاف مقادیر توابع پایه کلاتون‌براک تعمیم‌یافته نسبت به شکل نیوتنی مشاهده می‌شود. چنانکه انتظار داریم در محدودهٔ شتاب‌های $a > a_0$ مقدار شتاب نیوتنی و شتاب تعمیم‌یافته مشابهند و در محدودهٔ شتاب‌های $a < a_0$ اختلاف مشخصی بین شتاب نیوتنی و MOND مشاهده می‌شود.



شکل ۱ شتاب‌های بی‌بُعد نیوتنی (رنگ آبی) و MOND (رنگ قرمز)، $\boldsymbol{g_N/a_0}$ و $\boldsymbol{g/a_0}$، برای دو مد متفاوت بر حسب فاصله از مرکز کهکشان (شعاع)، مد m=0 , n=2 سمت راست و مد m=2 , n=3، سمت چپ.

برای به دست آوردن توابع تعمیم یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌براک باید از توابع پایه شتاب MONDی کلاتون‌براک به طور عددی انتگرال بگیریم. یعنی برای هریک از توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون‌براک

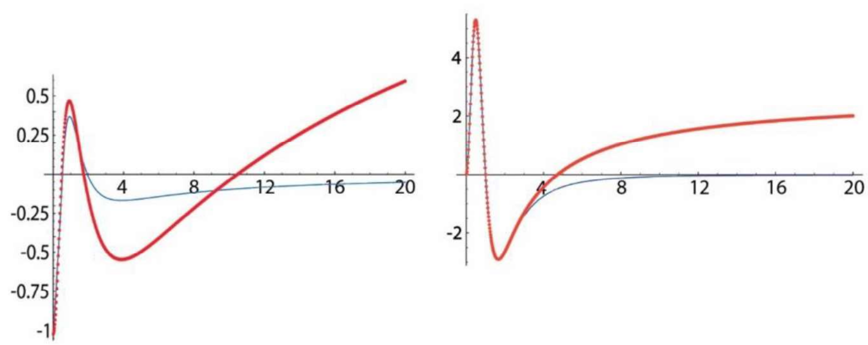
$$\psi(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} g(r)dr \qquad (۹)$$

که در آن r_{ref} مبدأ پتانسیل است. در رابطهٔ مشابهِ نیوتنی با توجه به شکل شناخته شدهٔ پتانسیل نیوتنی، مبدأ را بی‌نهایت قرار می‌دهیم که در اینجا صادق نیست. پس در اینجا برای اینکه مشکل

مبدأ پتانسیل را حل کنیم، از مقدار پتانسیل نیوتنی در مبدأ استفاده می‌کنیم. چرا که با توجه به الگوی منحنی‌های چرخش کهکشان‌های مارپیچی که از مشاهده به دست می‌آید و مقایسهٔ آن با الگوی نیوتنیِ منحنی سرعت، به این نتیجه می‌رسیم که مقدار پتانسیل تعمیم‌یافته در مبدأ $(r=0)$ با تقریب خوبی با مقدار نیوتنیِ آن برابر است (چون در مبدأ شتاب‌ها نیوتنی هستند). از این رو به جای معادلهٔ (۹) از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\psi(r) = \varphi(0) - \int_0^r g(r)dr \qquad (۱۰)$$

و به این ترتیب توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون-براک با انتگرال‌گیری عددی فوق محاسبه می‌شوند ($\varphi(0)$ مقدار پتانسیل نیوتنی در مبدأ است که برای هریک از ψ_n^mها متفاوت است).



شکل ۲ پتانسیل‌های بی‌بُعد نیوتنی (به رنگ آبی) و MOND (رنگ قرمز) برای دو مد متفاوت بر حسب فاصله از مرکز کهکشان. سمت چپ: مد m=0 و n=2. سمت راست: مد m=2 و n=3.

در شکل ۲، برای نمونه، منحنی‌های بی‌بُعد توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون-براک (رنگ آبی)و توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون-براک (رنگ قرمز) φ_n^m و ψ_n^m، را برای دو مد متفاوت (مد m=0 , n=2 سمت راست و مد m=2 , n=3، سمت چپ) بر حسب فاصله از مرکز کهکشان (شعاع) رسم کرده‌ایم. مقادیر پتانسیل را به مقدار v_∞^2 و مقادیر شعاع را مانند شکل ۱ بهنجار کرده‌ایم. در این شکل هم اختلاف مقادیر توابع پتانسیل پایهٔ کلاتون-براک تعمیم‌یافته نسبت به شکل نیوتنی مشاهده می‌شود. چنانکه انتظار داریم در محدودهٔ شتاب‌های $a > a_0$ مقدار پتانسیل نیوتنی و شتاب تعمیم‌یافته مشابهند و در محدودهٔ شتاب‌های $a < a_0$ اختلاف مشخصی بین پتانسیل نیوتنی و MOND مشاهده می‌شود. بدین شکل، نتایج عددی حاصل انتظارات نظری مربوط به پتانسیل و شتاب MOND را برای توابع پایه مد نظر برآورده می‌سازند. همان‌طور که در شکل می‌بینیم مقایسهٔ پایه‌های نیوتنی (آبی رنگ) با پایه‌های MONDی (قرمز رنگ) نشان می‌دهد که اگرچه توابع پایهٔ

نیوتنی کلاتون‌ـبراک در فواصل دور به سمت صفر افت می‌کردند اما توابع پایهٔ کلاتون‌ـبراک MONDی در فواصل دور به صفر میل نمی‌کنند بلکه تفاوت مشخصی با توابع نیوتنی دارند که این تفاوت به این توابع پایه‌ای که تعمیم داده‌ایم این امکان را می‌دهد که برای بسط توابع دلخواه پتانسیل MONDی به کار روند در حالی‌که نسخهٔ نیوتنی آن‌ها قادر به این کار نبود چرا که در فواصل دور به صفر افت می‌کرد.

۳. همگراییِ بسطِ پتانسیل‌های دیسک کوزمین و نمایی بر حسب توابع پتانسیل پایهٔ تعمیم‌یافتهٔ کلاتون‌ـبراک

در این قسمت توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک را به طور نمونه در بسط پتانسیل‌های تعمیم‌یافتهٔ دیسک کوزمین و نمایی به‌کار می‌بریم و نشان می‌دهیم که بسط‌های مذکور همگرا است. ابتدا دیسک کوزمین را در نظر می‌گیریم. پتانسیل دیسک کوزمین به این شکل است

$$\varphi_k(R,z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+(h+|z|)^2}} \qquad (۱۱)$$

که در آن R فاصله از مرکز دیسک (در صفحهٔ دیسک) در مختصات استوانه‌ای و z فاصله عمودی از مرکز دیسک در آن مختصات است. به طوری که در نقاط $z<0$، φ_k برابر است با پتانسیل جرم نقطه‌ای M که در نقطهٔ $(R,z)=(0,h)$ قرار گرفته باشد و در نقاط $z>0$، φ_k برابر است با پتانسیل جرم نقطه‌ای M که در نقطهٔ $(R,z)=(0,-h)$ قرار گرفته باشد. چگالی سطحیِ معادل پتانسیل کوزمین برابر است با $\sigma_k(R) = \frac{Mh}{2\pi(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$. این جفت چگالی‌ـپتانسیل به عنوان دیسک تومرهٔ مدل ۱ نیز شناخته می‌شوند (اوانز و دی زیو، ۱۹۹۲). بسط مورد نظر را به این شکل می‌نویسیم

$$\psi_k(R) = \sum_j c_j \psi_j^{m=0}(R) \qquad (۱۲)$$

که در آن ψ_k پتانسیل تعمیم یافتهٔ دیسک کوزمین، $\psi_j^{m=0}$ توابع تعمیم یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک برای حالت اصلی $(m=0)$ و c_jها ضرایب بسط هستند. هدف ما محاسبهٔ c_jهاست به طوری که بسط فوق به مقدار دقیق پتانسیل MONDی دیسک کوزمین (در حالتِ ضخامتِ صفر) همگرا شود. برای این کار ابتدا حل عددی پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک کوزمین را (مطابق روش برادا و میلگرام، ۱۹۹۵) به‌دست می‌آوریم و سپس بسط فوق را انجام می‌دهیم. برای محاسبهٔ ضرایب بسط، دو طرف رابطهٔ (۱۲) را در $\psi_i^0(R)$ ضرب کرده و به شکل زیر انتگرال می‌گیریم،

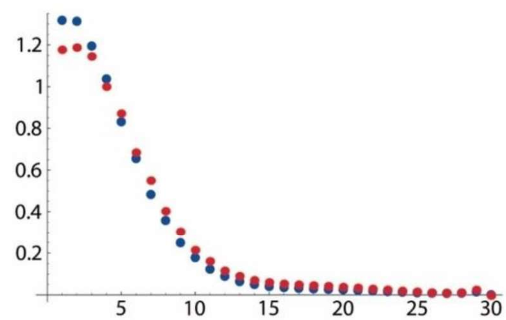
$$\int_0^\infty \psi_k(R)\,\psi_i^0(R) R dR = \sum_j c_j \int_0^\infty \psi_j^0(R)\,\psi_i^0(R)\, R dR \qquad (۱۳)$$

با نوشتنِ رابطهٔ فوق برای j تابع پایه، به j معادله و j مجهول می‌رسیم که با حلِ این معادلات ضرایبِ c_j به‌دست می‌آیند. به این شکل پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک کوزمین را برحسب سی جملهٔ

اولِ توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک بسط دادیم. برای بررسی همگراییِ بسط به مقدار مشخصِ پتانسیل، از همگراییِ کوشی (Cauchy convergence) استفاده می‌کنیم. بر این اساس، J_Nبه شکلِ زیر نشان‌دهندهٔ همگرایی بسط به مقدار مد نظر است،

$$J_N = \frac{1}{2}\int[\psi(R) - \sum_{j=0}^{N} c_j\psi_j^m]^2\, RdR \qquad (۱۴)$$

که در آن N بیانگر تعداد جملات بسط است. بسط مشابهی را می‌توان برای پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک نمایی بر حسب توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک انجام داد. برای این کار در رابطهٔ (۱۲) به جای پتانسیل مربوط به دیسک کوزمین ψ_k، پتانسیل مربوط به دیسک نمایی را (مطابق دستاوردبرادا و میلگرام، ۱۹۹۵) قرار دادیم. محاسباتِ مشابههمگرا بودنِ بسط فوق را برای پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک نمایی نیز نشان می‌دهد. در شکل ۳ منحنی همگرایی کوشی، J_N، را بر حسب تعداد جملاتِ بسط، N، برای بسط پتانسیل تعمیم یافتهٔ دیسک‌های کوزمین (به رنگ قرمز) و نمایی (به رنگ آبی) رسم کرده‌ایم. چنانکه مشاهده می‌شود بسط‌های توابع پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ دیسک‌های کوزمین و نمایی بر حسبِ توابع پتانسیل تعمیم یافتهٔ‌پایهٔ کلاتون‌ـبراک، با ضرایب بسط محدود به مقادیر پتانسیلِ مورد نظر همگراست.



شکل ۳ منحنی همگراییِ کوشی، J_N، بر حسب تعداد جملات بسط، N، برای بسط پتانسیل تعمیم یافتهٔ دیسک کوزمین (رنگ آبی) و دیسک نمایی (رنگ قرمز).

۴. نتیجه‌گیری

حل تحلیلی معادلهٔ غیرخطی پواسون تعمیم‌یافتهٔ MOND در حالت کلی کار بسیار دشواری است. ما در این مقاله با محاسبات عددی توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌ـبراک را درفرمول‌بندی MOND بهدست آورده و با بسط توابع پتانسیل تعمیم‌یافتهٔ معروف (مانند دیسک‌های نماییو کوزمین) بر حسب توابع تعمیم‌یافتهٔ پایهٔ کلاتون‌ـبراک کاربرد توابع حاصل را آزمودیم. بسط توابع پتانسیل دیسک نمایی و کوزمین بر حسب توابع پتانسیل پایه تعمیم‌یافتهٔ کلاتون‌ـبراکبا ضرایب بسط

محدود، همگرا است و لذا این توابع تعمیم‌یافته را می‌توان به عنوان توابع پایه در حل معادله‌ی پواسون تعمیم‌یافته بر حسب نظریهٔ MOND به‌کار برد. به این ترتیب توابع تعمیم‌یافتهٔ پتانسیل پایهٔ کلاتون‌براک را می‌توان برای بسط دیگر پتانسیل‌های مختلفِ MONDی برای دیسک‌هایی که بدون برآمدگی بوده و تقارن محوری دارند، به‌کار گرفت. کاربرد توابع پتانسیل پایه‌ای که بهدست آوردیم برای بسط دیگر پتانسیل‌های مربوط به دیسک‌های نازک کهکشانی، تا جایی که در تقریب ضخامت صفر (z=0) قرار بگیرند، تعمیم‌پذیر است. از این توابع پایه همچنین می‌توان در شبیه‌سازی‌ها و کدهایی که برای مطالعهٔ دینامیک دیسک‌های کهکشانی به کار می‌روند به ویژه در روش‌هایی چون شبیه‌سازی سامانه‌های چندذره‌ای و مشِ ذره‌ایاستفاده کرد.

قدردانی

از استاد بزرگوار دکتر میرعباس جلالی که در مراحل انجام این کار از دانش، راهنمایی و بحث‌های مفید ایشان استفاده کردم سپاسگزارم.

منابع

[1] Aoki S., Iye, M., Astron. Soc. Japan, Bi-orthogonalization of Toomre's surface-density functions for flat galaxies, 30, 519-531, 1978.

[2] Aoki S., Noguchi M., and Iye, M., Global Instability of Polytropic Gaseous Disk Galaxies with Toomre's Density Distribution, *Publ. Astron. Soc. Japan*, 31, 737-774, 1979.

[3] Barada R., Milgrom M., Exact solutions and approximations of MOND fields of disc galaxies, *MNRAS*, 276, 453-459, 1995.

[4] Binney J., Tremaine S., *Galactic dynamics*,Princeton Univ. Press, Princeton, 42-45, 1987.

[5] Clutton-Brock M., The gravitational field of flat galaxies, *Astrophys. Space Sci.*, 16, 101-119, 1972.

[6] Milgrom M A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis , *ApJ*, 270, 365-370, 1983a.

[7] Milgrom M., A modification of the Newtonian dynamics - Implications for galaxies, *ApJ*, 270, 371-389, 1983b.

[8] Milgrom M., MOND theory, Canadian Journal of Physics, 93,107-118, 2015.

[9] Sanders H., Mc Gaugh S., Modified Newtonian Dynamics as an Alternative to Dark Matter, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 40, 263-317, 2002.

[10] Evans N.W., de Zeeuw P.T., Potential–density pairs for flat galaxies, *MNRAS*, 257, 152-176, 1992.

[11] Van Den Bosch C., Dalacanton J., Semi-Analytical Models for the Formation of Disk Galaxies II. Dark Matter versus Modified Newtonian Dynamics, ApJ, 534, 146-164, 2000.

[12] Toomre, A., On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies, *ApJ*, 138, 385, 1963.

[13] Kalnajs, A. J., Dynamics of Flat Galaxies. II. Biorthonormal Surface Density-Potential Pairs for Finite Disks, , *ApJ*, 205, 745-750, 1976.

[14] Hunter C., Potential-Density Relations for Flat Galaxies, *Astron. Soc. Japan*, 32, 33-40, 1980.

[15] Morse P. M., and Feshbach H., *Methods of Theoretical physics* (Mc Grow-Hill, New York, 1953), p. 1298.