Research Paper

Application of Multiple Exp Function Method to Obtain Soliton Solutions of Calogero -Bogoyavlenski-Schiff Equation

Azadeh Badiepour[1], Zainab Ayati[*2] , Hamideh Ebrahimi[3]

Received: 2020.01.02
Accepted: 2020.03.14

Abstract
In physics and mathematics, research on the exact solutions of nonlinear differential equations is of great importance. Precise solutions play an important role in understanding the properties and quality of nonlinear phenomena. A wide range of exact solutions is nonlinear differential equations of soliton solutions. The study of solitons is very important because of their wide applications in various sciences such as fluid mechanics, plasma physics, astronomy, signal propagation in optical fibers and so on. In this study, we attempt to obtain the soliton solutions of the calogero-Bogojavolenski-Schiff equation by using the multiple exp-function method with Maple software. One-soliton, two-soliton, and three-soliton type solutions have been obtained by using the method. The results can be used as a benchmark for numerical solutions of the underlying equations and it can be analyzed in different branches of science and physics. Multiple exp-function method is very useful for solving multiple soliton solutions due to its simple calculations, and it is easy to be extended for solving other nonlinear developmental equations.

Keywords: *Multiple exp Function Method; Calogero -Bogoyavlenski-Schiff Equation; Soliton, Partial Differntial Equation*

[1]Department of Mathematics, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran. Email: azadebadiepour@yahoo.com
[2]Assistant Professor. Department of Engineering Sciences, Faculty of Technology and Engineering, University of Guilan, East of Guilan, Rudsar, Iran. (Corresponding Author). Email: zainab.ayati@guilan.ac.ir
[3]Department of Mathematics, Rasht Branch, Islamic Azad University, Rasht, Iran. Email: ebrahimi.hamideh@gmail.com

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا
سال نهم، پیاپی ۱۷، تابستان ۱۳۹۸

کاربردهای روش تابع نمایی چندگانه برای به‌دست آوردن جواب‌های سولیتونی معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف[1]

آزاده بدیع‌پور[۲]، زینب آیاتی[۳*]، حمیده ابراهیمی[۴]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۰/۱۲
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۲/۲۴

چکیده

در فیزیک و ریاضی، تحقیق دربارهٔ جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی از اهمیت بسیاری برخوردار است. جواب های دقیق نقش مهمی را در درک ویژگی‌ها و کیفیت پدیده‌های غیرخطی ایفا می‌کنند. دسته گسترده‌ای از جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی جواب های سولیتونی می‌باشند. مطالعه سولیتون‌ها به دلیل کاربرد فراوانشان در علوم مختلف مانند مکانیک سیالات، فیزیک پلاسما، ستاره شناسی، انتشارسیگنال ها در فیبرهای نوری و غیره از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشند. در این پژوهش سعی بر این است تا با استفاده از روش تابع نمایی چندگانه مبتنی برساختارنرم‌افزاری میپل، جواب‌های

1 DOI: 10.22051/jap.2020.29699.1143

۲ گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران. Email: azadebadiepour@yahoo.com

۳ استادیار، گروه علوم مهندسی، دانشکدهٔ فنی شرق گیلان، دانشگاه گیلان ، رودسر ، ایران. (نویسنده مسئول). Email: zainab.ayati@guilan.ac.ir

۴ گروه ریاضی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران. Email: ebrahimi.hamideh@gmail.com

سولیتونی معادلهٔ کالوجرو–بوگویاولنسکی-اسچیف به دست آورده شود. با استفاده از این روش ، جواب های یک سالیتونی، دو سالیتونی و سه سالیتونی به دست آمده است. نتایج می تواند به عنوان معیار برای تعیین جواب های عددی معادلات مورد استفاده قرار گیرد و می توان آن را در شاخه‌های مختلف علوم و فیزیک تجزیه و تحلیل کرد. روش تابع نمایی چندگانه برای محاسبهٔ جواب های سالیتونی به کمک نرم افزارهای ریاضی بسیار ساده و مفید است و به راحتی می‌توان آن را به سایر معادلات تکاملی غیرخطی گسترش داد.

واژگان کلیدی: *روش تابع نمایی چندگانه، معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف، سولیتون، معادله با مشتقات جزیی.*

۱. مقدمه

اکثر پدیده های فیزیکی در مکانیک سیالات، الکتریسیته، کوانتوم و . . . با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توصیف می‌شوند، سازوکار فیزیکی پدیده‌ها در طبیعت، به وسیلهٔ این‌گونه معادلات توضیح داده می‌شود. برای مثال، می‌توان از پدیده‌های موج مشاهده‌شده در دینامیک سیال، پلاسما و محیط‌های کِشسان و تارهای نوری و . . . نام برد؛ بنابراین، مطالعهٔ آن‌ها از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است. در طول چهار دههٔ گذشته یافتن جواب دقیق این‌گونه معادلات هدف اصلی بسیاری از محققان بوده است. از بین روش هایی که برای به دست آوردن جواب دقیق این‌گونه معادلات به کار می روند، می‌توان به روش‌های تانژانت هایپربولیک [۱۴، ۱۵]، روش تابع نمایی [۱۸-۲۴]، آنالیز هموتوپی [۲۵، ۲۶] و ... اشاره کرد. دستهٔ گسترده‌ای از جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل غیرخطی جواب‌های سولیتونی است. سولیتون‌ها به دلیل کاربرد فراوانشان در علوم مختلف مانند مکانیک سیالات، فیزیک پلاسما، ستاره شناسی، انتشارسیگنال‌ها در فیبرهای نوری و غیره مورد توجه قرار گرفته‌اند [۷-۱۶]. به عبارت دیگر، سولیتون به دستهٔ خاصی از جواب‌های موضعی معادلهٔ غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل و ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می دهند. البته توافق عام بر سر تعریف سولیتون وجود ندارد و در منابع مختلف سولیتون را به صورت‌های متفاوت تعریف می‌کنند.

درازین و جانسون سه خاصیت به سولیتون‌ها نسبت دادند و عنوان کردند به موجی که این سه خاصیت را داشته باشد سولیتون گفته می‌شود: ۱. شکل آن تغییر نکند، ۲. در منطقه‌ای از فضا محدود باشد، ۳. بعد از برخورد با سولیتون‌های دیگر شکل خود را حفظ نماید مگر با انتقال فاز.

در ریاضیات و فیزیک، سولیتون یک موج منفرد منزوی خودتقویت‌کننده است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند شکل خود را حفظ می‌نماید. سولیتون‌ها در نتیجهٔ خنثی‌سازی آثار

غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند. آثار پاشندگی به رابطهٔ پراش بین فرکانس و سرعت امواج بر می‌گردد. برای اولین بار در ۱۸۳۴، جان اسکات راسل پدیدهٔ سولیتون را توصیف کرد. او یک موج سولیتونی را در کانال واحد (Union Canal) در اسکاتلند مشاهده نموده و سپس این پدیده را در یک مخزن موج بازسازی کرد و آن را موج انتقال نامید. هرچند اکتشاف اولیه از روی امواج بلند آب صورت گرفت، امواج انفرادی و سولیتون‌ها در میدان‌ها و زمینه‌های گوناگون فنی و علمی مطالعه شد و تحقیقات وسیع نظری و تجربی دربارهٔ آن‌ها انجام شد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها فیزیک پلاسماست. به عبارت دیگر، سولیتون‌ها به جواب‌های موضعی خاصی از یک معادلهٔ غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل و ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. نظریهٔ سولیتون با فیزیک جدید ارتباط نزدیکی دارد. به همین دلیل، نظریهٔ سولیتون توجه ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان زیادی را به خود جلب کرده است. این نظریه در قرن بیستم توسعه یافت و در حال حاضر یکی از مهم ترین موضوعات فیزیک و ریاضیات کاربردی محسوب می‌شود. در این پژوهش با استفاده از روش تابع نمایی چندگانه [۱ـ۱۳] جواب‌های سولیتونی معادلهٔ کالوجروـبوگویاولنسکی‌ـاسچیف (Calogero-Bogoyavlenski-Schiff) به دست آمده است. این معادله را بوگویاولنسکی واسچیف به شیوه‌های مختلف به دست آورده است. برای مثال، بوگویا از فرمول اصلاح‌شدهٔ لکس استفاده کرد درحالی که اسچیف با کاهش معادلهٔ دوگانهٔ یانگ میلز معادلهٔ مشابهی به دست آورد. اگرچه این معادله به صورت غیرقطعی به وجود می‌آید، می‌توان آن را به عنوان یک سیستم معادلات دیفرانسیل به شکل پتانسیل، به عنوان یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ چهارم نوشت. در سال‌های اخیر با توجه به اهمیت این معادله، پژوهشگرانْ روش‌های کلاسیک و غیر کلاسیکی برای به دست آوردن جواب‌های این معادله ارائه دادند [۲۸ـ۳۰]. چهارچوب این پژوهش به این صورت است که در بخش اول در ارتباط با این روش توضیحات لازم آورده شده و در بخش دوم کاربرد این روش برای حل معادلهٔ کالوجروـبوگویاولنسکی‌ـاسچیف مطرح‌شده و در آخر هم نتیجه‌گیری بیان شده است.

۲. روش تابع نمایی چندگانه

دکتر ما (Ma) و همکارانش [۲، ۶] روش تابع نمایی چندگانه را در سه مرحله بیان کرده‌اند. به طور خلاصه، این مراحل عبارت‌اند از: تعریف معادلات دیفرانسیل حل‌پذیر، تبدیل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی به معادلات معمولی، حل سیستم‌های جبری. نکتهٔ اصلی رویکرد آن‌ها جستجوی جواب‌های منطقی در مجموعه‌ای از متغیرهای جدید است که موج‌های

فردی را تعریف می‌کند. با استفاده از روش تابع نمایی چندگانه، جواب‌های یک و دو و سه سولیتونی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی به دست می‌آید. برای توضیح این مراحل اساسی، یک معادلهٔ دیفرانسیل در ابعاد (۱+۱) در نظر بگیرید،

$$F(x,t,u_t,u_x,\ldots)=0 \tag{۱}$$

در این مرحله یک دنباله از متغیرهای جدید تعریف می‌شود

$$h_i = h_i(x,\mathrm{t}) \quad , \quad 1 \le i \le n \tag{۲}$$

به طوری که

$$h_{i,x} = k_i h_i, h_{i,t} = -l_i h_i, 1 \le i \le n \tag{۳}$$

که در آن، k_i تعداد موج‌های زاویه‌ای و l_i فرکانس‌های موج هستند. این مرحله نقطهٔ شروعی برای ساختن جواب‌های دقیق معادلات غیرخطی است. فرض می‌کنیم

$$h_i = c_i e^{x_i},\ x_i = k_i x - w_i t, \quad 1 \le i \le n \tag{۴}$$

که در آن، c_iها ثابت‌های دلخواه هستند. در مرحله بعدی جواب‌های گویا را با متغیرهای جدید $h_i, 1 \le i \le n$ به صورت زیر درنظرمی گیریم

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{p}(h_1,h_2,\ldots,h_n)}{\mathrm{q}(h_1,h_2,\ldots,h_n)},\ p = \sum_{r,s=1}^{n}\sum_{i,j=0}^{M} p_{rs,ij} h_r^i h_s^j,\ q = \sum_{r,s=1}^{n}\sum_{i,j=0}^{N} q_{rs,ij} h_r^i h_s^j \tag{۵}$$

که در آن، $p_{kl,ij}$ و $q_{kl,ij}$ ثابت‌هایی هستند که بعد مشخص می‌شوند. جایگذاری (۵) در (۱) و در نظر گرفتن (۳) و (۴) یک معادلهٔ گویا به شکل زیر ایجاد می‌کند

$$G(x,t,h_1,\ldots,h_n) = 0 \tag{۶}$$

معادلهٔ (۶) یک معادلهٔ تبدیل‌شده از معادلهٔ (۱) است. این مرحلهٔ محاسبهٔ جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیل را به صورت مستقیم توسط سیستم‌های جبری در گام بعدی ممکن می‌سازد. با صفر قرار دادن صورت تابع کسریْ یک دستگاه معادلات جبری به دست خواهیم آورد که با حل آن به وسیلهٔ نرم‌افزار میپل می‌توانیم p و q به دنبال آن u را به دست آوریم. در قسمت بعد، ما از این روش برای حل معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف و یافتن جواب‌های آن استفاده می‌کنیم.

۳. کاربرد روش تابع نمایی چندگانه برای معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف

در این قسمت، از روش تابع نمایی چندگانه برای حل معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف و جواب‌های سولیتونی آن بهره می‌گیریم. شکل کلی این معادله به صورت زیر بیان می‌شود،

$$u_{xt} + u_{xxxy} + 4u_x u_{xy} + 2u_{xx}u_y = 0 \tag{۷}$$

بخش اول: جواب‌های یک‌سولیتونی

چند جمله‌ای‌های $P(x,y,t)$ و $Q(x,y,t)$ از درجهٔ یک را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u(x,y,t) = \frac{P(x,y,t)}{Q(x,y,t)} \tag{۸}$$

که در آن

$$h_1 = c_1 e^{xk_1 + yr_1 - tl_1}, P(x,y,t) = a_0 + a_1 h_1, Q(x,y,t) = b_0 + b_1 h_1$$

لازم است ذکر کنیم که b_1 ،b_0 ،a_1 ،a_0 ثابت‌هایی هستند که بعد مشخص می‌شوند. با جایگذاری (۸) در (۷) و مساوی قرار دادن ضرایب تابع نمایی در صورتِ عبارتِ گویای حاصل، یک دستگاه جبری غیرخطی از معادلات به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
&c_1k_1(-a_0b_0^3b_1k_1^2r_1 + a_1b_0^4k_1^2r_1 + a_0b_0^3b_1l_1 - a_1b_0^4l_1) = 0,\\
&c_1k_1(11a_0b_0^2b_1^2c_1k_1^2r_1 - 11a_1b_0^3b_1c_1k_1^2r_1 + 6a_0^2b_1^2b_0c_1k_1r_1 - 12a_0a_1b_0^2b_1c_1k_1r_1\\
&\qquad + 6a_1^2b_0^3c_1k_1r_1 + a_0b_0^2b_1^2c_1l_1 - a_1b_0^3b_1c_1l_1) = 0\\
&c_1k_1(-11a_0b_0b_1^3c_1^2k_1^2r_1 + 11a_1b_0^2b_1^2c_1^2k_1^2r_1 - 6a_0^2b_1^3c_1^2k_1r_1 + 12a_0a_1b_1^2b_0c_1^2k_1r_1\\
&\qquad - 6a_1^2b_0^2b_1c_1^2k_1r_1 - a_0b_0b_1^3c_1^2l_1 + a_1b_0^2b_1^2c_1^2l_1) = 0\\
&c_1k_1(a_0b_1^4c_1^3k_1^2r_1 - a_1b_0b_1^3c_1^3k_1^2r_1 - a_0b_1^4c_1^3l_1 + a_1b_0b_1^3c_1^3l_1) = 0
\end{aligned}$$

با حل این دستگاه معادلات جبری به کمک میپل نتایج زیر حاصل می‌شود،

$$a_0 = a_0,\ b_0 = b_0,\ a_1 = \frac{b_1(2b_0k_1 + a_0)}{b_0},\ b_1 = b_1,\ k_1 = k_1,\ l_1 = k_1^2 r_1,\ r_1 = r_1 \tag{۹}$$

لذا جواب یک سولیتونی متناظر آن عبارت است از

$$u(x,y,t) = \frac{2e^{xk_1 + yr_1 - tk_1^2r_1} b_0b_1c_1k_1 + e^{xk_1 + yr_1 - tk_1^2r_1} a_0b_1c_1 + a_0b_0}{b_0(b_1c_1e^{xk_1 + yr_1 - tk_1^2r_1} + b_0)} \tag{۱۰}$$

نمودار جواب به ازای برخی مقادیر پارامترها در شکل ۱ رسم شده است.

بخش دوم: جواب‌های دوسولیتونی

به همین ترتیب چند جمله‌های $P(x,y,t)$ و $Q(x,y,z)$ از درجهٔ دو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$u(x,y,t) = \frac{P(x,y,t)}{Q(x,y,t)} \tag{۱۱}$$

که در آن،

$$h_1 = c_1 e^{xk_1 + yr_1 - tl_1}$$
$$h_2 = c_2 e^{xk_2 + yr_2 - tl_2}$$
$$P(x,y,t) = 2(k_1 h_1 + k_2 h_2 + a_{12}(k_1 + k_2) h_1 h_2)$$
$$Q(x,y,t) = 1 + h_1 + h_2 + a_{12} h_1 h_2$$

و $c_1, c_2, k_1, k_2, r_1, r_2, l_1, l_2$ ثابت‌هایی هستند که بعد مشخص می‌شوند. با جایگذاری این جواب در معادلهٔ (۷) و با صفر قرار دادن ضرایب توابع نمایی در صورتِ عبارتِ گویای حاصل، به یک دستگاه معادلهٔ جبری می‌رسیم که با حل آن‌ها خواهیم یافت،

$$a_{12} = \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2}, k_1 = k_1, k_2 = k_2, l_1 = k_1^2 r_1, l_2 = k_2^2 r_2, r_1 = r_1, r_2 = r_2 \qquad (۱۲)$$

بنابراین جواب دوسولیتونی متناظر با آن به صورت زیر است،

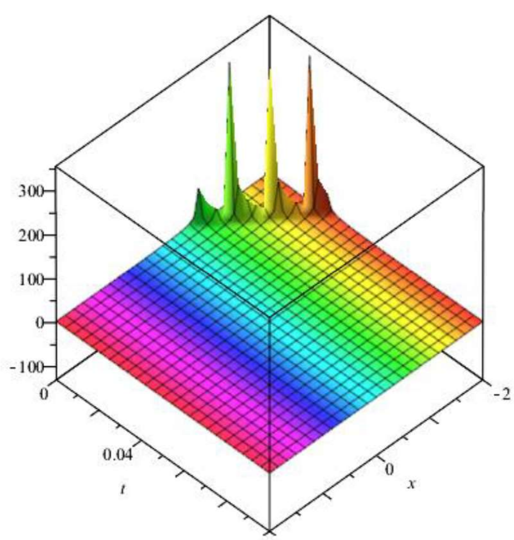
$$u(x,y,t) = \frac{2(k_1 + k_2)(c_1c_2(k_1 - k_2)^2 e^{x_1 + x_2} + c_1k_1(k_1 + k_2)e^{x_1} + c_2k_2(k_1 + k_2)e^{x_2}}{c_1c_2(k_1 - k_2)^2 e^{x_1 + x_2} + c_1(k_1 + k_2)^2 e^{x_1} + c_2(k_1 + k_2)^2 e^{x_2} + (k_1 + k_2)^2}$$

که در آن،

$$x_1 = xk_1 + yr_1 - tk_1^2 r_1, \qquad x_2 = xk_2 + yr_2 - tk_2^2 r_2$$

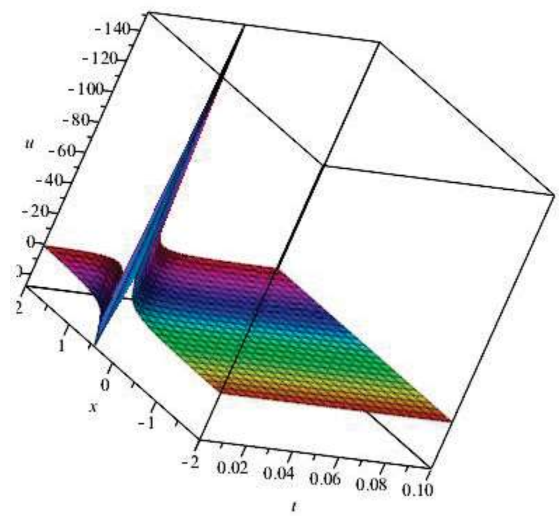
نمودار جواب به ازای برخی پارامترها در شکل های ۲ تا ۵ رسم شده است.

Applications, 2015, 390-397.



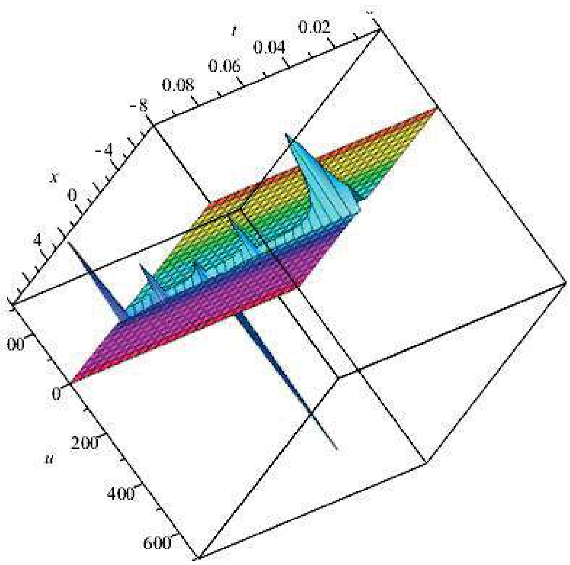
شکل ۱ جواب‌های یک‌سولیتونی

$\cdot t = 0,¼, 0.1, x = -2,¼, 2, k_1 = 1, r_1 = -50, a_0 = 1, b_0 = 1, b_1 = 2$



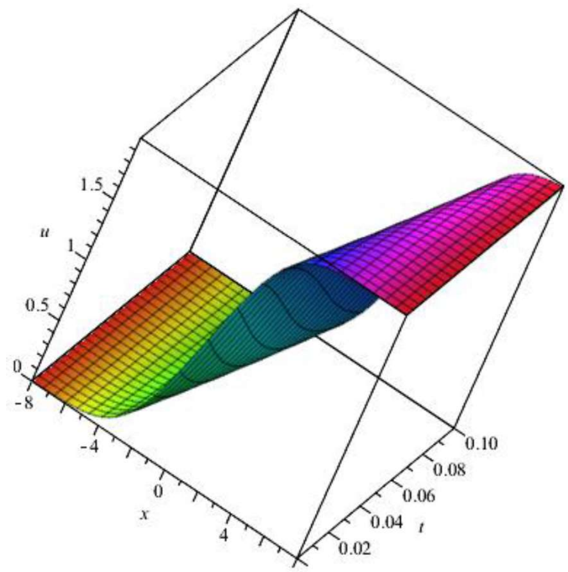
شکل ۲ جواب‌های یک سولیتونی

$b_0=-1, b_1=-2$ ،$a_0=-1$ ،$r_1=-20$ ،$k_1=-2$ ،$x=-2,¼,2$ ،$t=0,¼,0.1$.

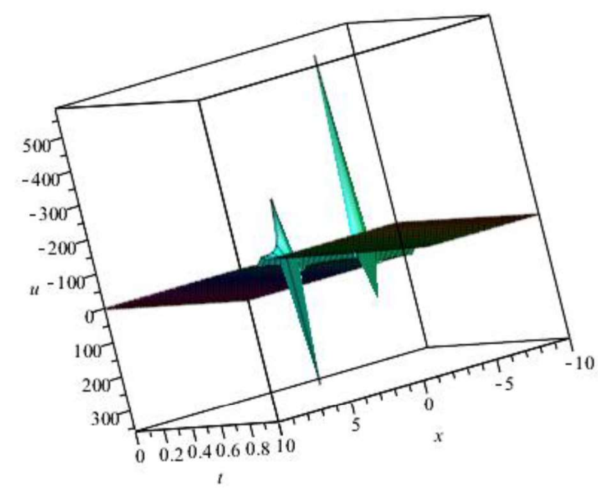


شکل۳ جواب‌های دوسولیتونی

$t=0,¼,0.1, x=-8,¼,8, k_1=-1, k_2=-1, r_1=-20, r_2=30$.



شکل ۴ جواب‌های دوسولیتونی $t = 0, 1/4, 0.1, x = -8, 1/4, 8, k_1 = 1, k_2 = 1, r_1 = 50, r_2 = 30$.



شکل ۵ جواب‌های دوسولیتونی $t = 0, 1/4, 1, x = -10, 1/4, 10$، $a_{12} = -1, a_{13} = 0, a_{23} = 0$،
$k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$، $l_1 = 1, l_2 = -1, l_3 = 1$،
$r_1 = -1, r_2 = 1, r_3 = -1$.

بخش سوم: جواب‌های سه‌سولیتونی

مشابه دو حالت قبل، چندجمله‌های $P(x,y,t)$ و $Q(\mathrm{x},y,t)$ از درجهٔ سه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P(x,y,t) = 2(k_1h_1 + k_2h_2 + k_3h_3 + a_{12}(k_1 + k_2)h_1h_2 + a_{13}(k_1 + k_3)h_1h_3 + a_{23}(k_2 + k_3)h_2h_3 + a_{12}a_{13}a_{23}(k_1 + k_2 + k_3)h_1h_2h_3)$$
$$Q(x,y,t) = 1 + h_1 + h_2 + h_3 + a_{12}h_1h_2 + a_{13}h_1h_3 + a_{23}h_2h_3$$

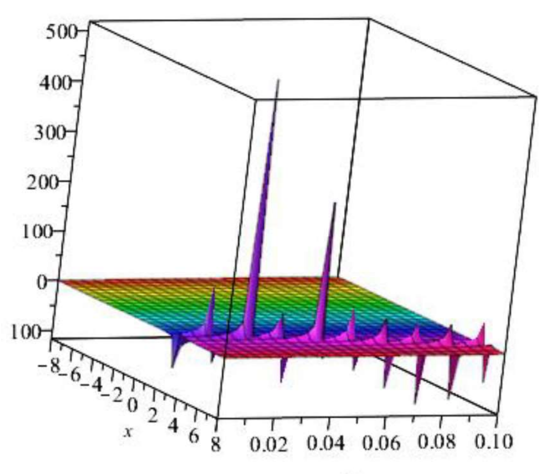
که در آن،

$$h_1 = c_1e^{xk_1 + yr_1 - tl_1}$$
$$h_2 = c_2e^{xk_2 + yr_2 - tl_2}$$
$$h_3 = c_3e^{xk_3 + yr_3 - tl_3}$$

با جایگذاری این جواب در معادلهٔ (۷) و با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توابع نمایی در صورت عبارت گویای حاصل به یک دستگاه از معادلات جبری می‌رسیم که با حل آن‌ها خواهیم داشت

$$a_{12} = \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{(k_1 + k_2)^2}, a_{13} = \frac{k_1^2 - 2k_1k_3 + k_3^2}{(k_1 + k_3)^2}, a_{23} = \frac{k_2^2 - 2k_2k_3 + k_3^2}{(k_2 + k_3)^2}, \quad (۱۳)$$
$$l_1 = k_1^2r_1, l_2 = k_2^2r_2, l_3 = k_3^2r_3.$$

بنابراین، جواب متناظر با آن‌ها به صورت $u(x,y,t) = \frac{P(x,y,t)}{Q(x,y,t)}$ است که P و Q بر اساس جواب (۱۳) به دست می‌آیند. نمودار جواب در شکل ۶ رسم شده است.



شکل ۶ جواب‌های سه‌سولیتونی $t = 0,¼,0.1$ ، $x = -8,¼,8$ ، $k_1 = 0.6,\ k_2 = 0.8,\ k_3 = 1$ ، $r_1 = 10,\ r_2 = 20,\ r_3 = 30$.

۴. نتیجه‌گیری

روش استفاده‌شده در این پروژه به علت سهولت استفاده و قابلیت استفاده از دستگاه‌های جبری به ما امکان انجام محاسبات بزرگ را می‌دهد. از طرفی در مقایسه با خیلی از روش‌هایی که صرفاً جواب دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را محاسبه می‌کنند به علت به دست آوردن جواب‌های چندسولیتونی از ارجحیت برخوردار است. حدس ما آن است که این روش را می‌توان به صورت موازی برای جواب‌های چهارسولیتونی و بالاتر هم استفاده کرد، لیکن مستلزم محاسبات پیچیده‌تر خواهد بود. در این مقاله جواب‌های یک و دو سولیتونی معادلهٔ کالوجرو-بوگویاولنسکی-اسچیف را به دست آوردیم که با توجه به اینکه این معادله یک معادلهٔ مهم تکامل غیرخطی در فیزیک-ریاضی است، به دست آوردن جواب‌های آن مد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در آخر، می‌توان گفت روش تابع نمایی چندگانه روشی بسیار مفید برای به دست آوردن جواب‌های چندسولیتونی است و به راحتی می‌توان آن را به سایر جواب‌های معادلات غیرخطی گسترش داد.

منابع

[1] Darvishi M. T. , Najafi M. , “Application of Multiple Exp-Function Method to Obtain Multi-Soliton Solutions of (2 + 1)- and (3 + 1)-Dimensional Breaking Soliton Equations”, *Applied Mathematics*, 1(2): 41-47, 2011.

[2] Maa w. X. , Zhu Z., “Solving the (3+1)-dimensional generalized KP and BKP equations by the multiple exp-function algorithm”, *Applied Mathematics and Computation*, 11871-11879, 2012.

[3] Zayed E. M. E., Al-Nowehy A., “The Multiple Exp-Function Method and the Linear Superposition Principle for Solving the (2+1)-Dimensional Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff Equation”, *Z. Naturforsch*. 775–779, 2015.

[4] Adem A. R. , “A (2 + 1)-dimensional Korteweg de Vries type equation in water waves: Lie symmetry analysis; multiple exp-function method; conservation laws”, *International Journal of Modern Physics B*, 1640001, 2016.

[5] ZAYED Elsayed M. E, AMER Yaser A., AL-NOWEHY Abdul-Ghani, The Modified Simple Equation Method and the Multiple Exp-function Method for Solving Nonlinear Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 793–812, 2016.

[6] Ma W. X., Huang T. W., Zhang Y., “A multiple exp-function method for nonlinear differential equations and its application”, *Physica Scripta*, Phys. Scr. 82, art. no. 065003, 2010.

[7] Yildirim Y,, Yasar E., Adem A. R., “A multiple exp-function method for the three model equations of shallow water waves”, *Nonlinear Dynamics*, pages2291–2297, 2017.

[8] Yildirim Y., Yasar E., “Multiple exp-function method for soliton solutions of nonlinear evolution equations”, *Chin. Phys*., 070201, 2017.

[9] Liu Jian-Guo, Zhou L., He Y., “Multiple soliton solutions for the new (2 + 1)-dimensional Korteweg–de Vries equation by multiple exp-function method”, *Applied Mathematics Letters*, 80 (2018).

[10] Cao B., “Solutions of Jimbo-Miwa Equation and Konopelchenko-Dubrovsky Equations”, *Acta Applicandae Mathematicae*, 181–203, 2010.

[11] Wu M., "Nonlinear Spin Waves in Magnetic Film Feedback Rings", *Solid State Physics*, Pages 163-224, 2010.
[12] Yildirim Y,, Yasar E., Adem A. R.,, "A multiple exp-function method for the three model equations of shallow water waves", *Nonlinear Dynamics*, DOI 10.1007/s11071-017-3588-9, 2017.
[13] Liu Jian-Guo, Zhou L., He Y., "Multiple soliton solutions for the new (2 + 1)-dimensional Korteweg–de Vries equation by multiple exp-function method", *Applied Mathematics Letters*, 80 71–78 m 2018.
[14] Wazwaz A. M., "The tanh method: solitons and periodic solutions for the Dodd-Bullough-Tzikhailov and the Tzitzeica-Dodd-Bullough equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 25, 55-63, 2005.
[15] Zayed E. M. E, AbdelRahman H. M., "The extended tanh-method for finding traveling wave solutions of nonlinear PDEs", *Nonlin Sci Lett A*, 193-200, 2010.
[16] Wazwaz A. M., "Multiple-soliton solutions for extended (3 +1)-dimensional Jimbo–Miwa equations", *Applied Mathematics Letters*, 21-26, 2017.
[17] Jaradat H. M., "Muhammed Syam, M.M.M. Jaradat, Zead Mustafa, S. MomaniNew solitary wave and multiple soliton solutions for fifth order nonlinear evolution equation with time variable coefficients", 977-980, 2018.
[18] He J. H., Abdou M. A., "New periodic solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method", *Chaos, Solitons and Fractals*, 34,1421-1429, 2007.
[19] Khani F., Hamedi-Nezhad S., Darvishi M. T., Ryu S. W., "New solitary wave and periodic solutions of the foam drainage equation using the Exp-function method", *Nonlin. Anal.: Real World Appl*. 10, 1904-1911, 2009.
[20] Shin B. C., Darvishi M. T., Barati A., "Some exact and new solutions of the Nizhnik-Novikov-Vesselov equation using the Exp-function method", *Comput. Math. Appl.* 58(11/12), 2147-2151, 2009.
[21] Wu X. H., He J. H., "Exp-function method and its application to nonlinear equations", *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(3), 903-910, 2008.
[22] Darvishi M. T., Najafi M., "Some new exact solutions of the (3+1)-dimensional breaking soliton equation by the Exp-function method", *Nonlin. Science Lett. A*. 2(4) ,221-232, 2011.
[23] Ma w. X., Huang T., Zhang Y., "A multiple Exp-function method for nonlinear differential equations and its application", *Phys. Scr*. 82 065003, 2010.
[24] Zhang S., "Application of Exp-function method to high dimensional evolution equation", *Chaos, Solitons and Fractals*, 270-276, 2008.
[25] Liao S. J., "On the homotopy analysis method for nonlinear problems", *Appl. Math. Comput*, 147, 499-513, 2004.
[26] Rashidi M. M., Domairry G., Doosthosseini A., and Dinarvand S., "Explicit Approximate Solution of the Coupled KdV Equations by using the Homotopy Analysis Method", *Int. J. Math. Anal*. 581-589, 2008.
[27] Darvishi M. T., Najafi M.,, "Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional breaking soliton equation by (G'/G)-expansion method and modified F-expansion method", *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 6(2), 64-69 , 2012.
[28] Bruzon M. S., Gandarias M. L., Muriel C., Ramrez J., Saez S. and Romero F. R., "Calogero–Bogoyavlenskii–Schiffequation(2+1)dimensions", *Theoretical and Mathematical Physics*, 1367–1377, 2003.
[29] Chena S., Ma W. X., "Lump solutions of a generalized Calogero–Bogoyavlenskii–Schiff equation", *Computers and Mathematics with Applications*, 1680–1685, 2018.
[30] Ren B., Ma W. X., Yu J., "Lump Solutions for Two Mixed Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff and Bogoyavlensky-Konopelchenko", *Communications in Theoretical Physics*, 658-662, 2019.