

Research Paper

## Computational Investigation of Effect of Different Masses of Electron and Hole on Dielectric Moment of Exciton in a Conic Quantum Dot

Masoud Rezvani Jalal<sup>\*1</sup>, Marziyeh Farahani<sup>2</sup>, Ehsan Pakdaman Resa<sup>3</sup>

Received: 2019.11.23

Accepted: 2020.01.25

### Abstract

The excitonic wave-functions and dipole moments in a conic quantum dot with spherical base are numerically calculated. To perform the computations, a computer code, developed by the authors to solve Schrodinger equation based on the perturbation method of "configuration interaction", is used. The results show that if the effective masses of electron and hole are equal, then exciton dipole moment of all excitonic eigen-states will be equal to zero. On the other hand, the exciton will have dipole moment when the masses of electron and hole are different. When the electron mass is larger than that of hole, the moment orientation is directed towards the cone apex and when the electron mass become smaller the direction is inverted. From this finding it is revealed that difference of electron and hole masses in quantum dots lacking inversion center (here a conic one) causes an intrinsic electrical polarization in the confined exciton.

**Keywords:** *Exciton, Effective Mass of Electron and Hole, Dielectric Moment, Conic Quantum Dot*

---

<sup>1</sup> Assistant Professor. Department of Physics, Malayer University, Malayer, Iran. (Corresponding Author). rezvanijalal@malayeru.ac.ir

<sup>2</sup> M. Sc. In Physics, Department of Physics, Malayer University, Malayer, Iran. ma.farahani.2020@gmail.com

<sup>3</sup> M. Sc. In Physics, Department of Physics, Malayer University, Malayer, Iran. ehsan.pakdaman@rocketmail.com

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران، دانشگاه الزهرا  
سال نهم، پیاپی ۱۷، تابستان ۱۳۹۸

## مقاله پژوهشی

# بررسی محاسباتی اثر تفاوت جرم الکترون و حفره بر ممان دوقطبی الکتریکی اکسیتون در نقطه کوانتومی مخروطی<sup>۱</sup>

مسعود رضوانی جلال<sup>۲\*</sup>، مرضیه فراهانی<sup>۳</sup>، احسان پاکدامن رسا<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۰۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۰۵

### چکیده

در مقاله حاضر، توابع موج اکسیتونی و ممان دوقطبی الکتریکی مربوط به آنها در یک نقطه کوانتومی مخروطی با قاعده کروی به صورت عددی محاسبه می‌شود. برای انجام محاسبات از یک کد رایانه‌ای استفاده می‌شود که نویسندگان برای حل معادله شرودینگر بر اساس روش اختلالی "برهمکنش پیکربندی" تدوین کرده‌اند. نتایج محاسبات نشان می‌دهد که اگر جرم مؤثر الکترون و حفره با هم برابر باشد آنگاه ممان دوقطبی اکسیتون برای تمام ویژه‌حالت‌های اکسیتونی مساوی با صفر خواهد بود. از طرف دیگر، وقتی که جرم الکترون و حفره متفاوت باشد اکسیتون دارای قطبش الکتریکی خواهد شد. در وضعیتی که جرم الکترون بیشتر از جرم حفره است جهت این ممان به سمت رأس مخروط است و هنگامی که جرم الکترون کمتر شود جهت آن وارون

<sup>۱</sup> DOI: 10.22051/jap.2020.29255.1141

<sup>۲</sup> استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران. (نویسنده مسئول). rezvanijalal@malayeru.ac.ir

<sup>۳</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران. ma.farahani.2020@gmail.com

<sup>۴</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران.

Email: ehsan.pakdaman@rocketmail.com

می‌شود. از این یافته چنین بر می‌آید که اختلاف جرم الکترون و حفره در نقاط کوانتومی فاقد مرکز تقارن (در اینجا مخروطی) باعث ایجاد قطبش الکتريکی ذاتی در اکسیتون خواهد شد.

**واژگان کلیدی:** اکسیتون، جرم مؤثر الکترون و حفره، ممان دوقطبی الکتريکی، نقطه کوانتومی مخروطی.

کد PACS: ۰۳، ۷۷، ۸۱

## ۱. مقدمه

نقاط کوانتومی ذرات نانومتری از مواد نیمرسانا هستند که کاربردهای عملی و بالقوه زیادی در حوزه اپتیک و الکترونیک دارند. نقاط کوانتومی هم خواص نیمرساناها (مانند حامل‌های بار الکترون و حفره و نیز نوارهای هدایت و ظرفیت و شکاف انرژی) را دارند و هم به دلیل داشتن اندازه نانومتری، خواص قوی نانومقیاسی (مانند نسبت سطح به حجم بالا و نیز اثرات کوانتومی) از خود بروز می‌دهند. این نیمرساناهای نانومتری کاربردهای فراوانی همچون محیط فعال لیزری (در لیزرهای موسوم به لیزر نقطه کوانتومی) دارند و، از طرف دیگر، علاقه پژوهشگران را در حوزه‌های مختلف نظری و محاسباتی به خود جلب کرده‌اند [۲۰۱].

نه تنها دینامیک حامل‌های بار آزاد (یعنی الکترون و حفره) در این ذرات نانومقیاس بسیار متأثر از اثرات حبس کوانتومی<sup>۱</sup> است، بلکه خواص حالت مقید الکترون-حفره (معروف به اکسیتون) نیز متفاوت با نیمرساناهای ماکروسکوپی و کپه‌ای است [۴۰۳]. ساده‌ترین مدلی که می‌توان برای مطالعه این نوع نانوذره مطرح کرد مفهوم چاه پتانسیل با دیواره بی‌نهایت است [۶۰۵]. بر طبق این مدل، نقطه کوانتومی (با هر شکل دلخواهی) به صورت چاه پتانسیل سه‌بعدی با دیواره‌های بی‌نهایت لحاظ می‌شود و انرژی‌ها و توابع موج تک‌ذره‌ای آن با حل معادله شرودینگر در فضای درونی نقطه به دست می‌آیند. بسیاری از ویژگی‌های نقاط کوانتومی با به کارگیری همین مدل ساده فهمیده می‌شود. اکثر مطالعات نظری در مراجع به شکل‌های هندسی ساده همچون مکعب و کره و استوانه محدود بوده و به سختی می‌توان تحقیقات تحلیلی دقیقی بر نقاط کوانتومی با شکل‌های هندسی دیگر پیدا کرد [۷، ۸]. این در حالی است که امکان دارد نقطه کوانتومی با شکل نامتقارن زوایای پنهان و خصوصیات کشف‌نشده‌ای داشته باشد که در نقاط متقارن امکان وقوع و قابلیت مشاهده نداشته باشند. بدین منظور، در این مقاله یک نقطه کوانتومی به شکل مخروط با قاعده

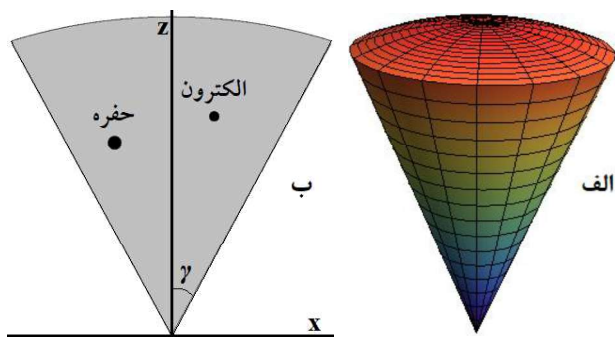
<sup>1</sup> Quantum Confinement

کروی مد نظر قرار می‌گیرد. در چنین هندسه‌ای می‌توان جواب‌های تحلیلی تک‌ذره‌ای برای معادله شرودینگر پیدا کرد و از آنجا که در اکثر روش‌های سنتز نقاط کوانتومی با مکانیزم رشد لایه‌های نازک، ذرات حاصل غالباً شکل مخروطی و هرمی یا برشی از آنها دارند، انجام این مطالعه و به ثمر رساندن آن احتمالاً ارزشمند است [۹]. کارهای نظری و تحلیلی معدودی راجع به نقاط کوانتومی هرمی و مخروطی (البته با قاعده تخت) در مراجع دیده می‌شود که همگی آنها فقط انرژی‌ها و توابع موج تک‌الکترونی را محاسبه کرده‌اند و هیچ اشاره‌ای به اکسیتون نداشته‌اند، در حالی که برخی خواص فیزیکی نقاط کوانتومی از اکسیتون و حبس کوانتومی آن در فضای نانومتری نقطه سرچشمه می‌گیرد [۸، ۱۰-۱۲]. برای مثال، اکسیتون آزاد انرژی پیوندی بسیار ضعیفی دارد و در دمای معمولی تشکیل نمی‌شود و فقط در دماهای بسیار پایین قابل تشکیل و آشکارسازی است، ولی اکسیتون محبوس در نقاط کوانتومی پیوند قوی‌تری دارد و از این رو امکان مشاهده در دماهای بالاتر را دارد [۵].

در مقاله حاضر، ابتدا توابع موج تک‌ذره‌ای الکترون و حفره در داخل نقطه کوانتومی هرمی با حل تحلیلی معادله شرودینگر پیدا می‌شوند و سپس با استفاده از آنها در الگوریتمی به نام "برهمکنش پیکربندی" که نوعی روش اختلالی است توابع موج اکسیتونی به دست می‌آیند [۵]. با داشتن این توابع موج راه به سوی محاسبه بسیاری از خواص فیزیکی اکسیتون محبوس در نقطه کوانتومی هرمی مانند ممان دوقطبی الکتریکی آن هموار می‌شود.

## ۲. الگوریتم محاسبه توابع موج اکسیتونی

نقطه کوانتومی مخروطی با زاویه رأس  $\gamma$  که قاعده‌ای کروی به شعاع انحنای  $a$  دارد، مد نظر قرار می‌گیرد. ساده‌ترین مدل برای نقطه کوانتومی آن است که همانند یک چاه پتانسیل سه‌بعدی با دیواره‌های بی‌نهایت در نظر گرفته شود. طبق این مدل، فرض می‌شود که پتانسیل فضای داخل نقطه کوانتومی، صفر و پتانسیل دیواره و فضای خارج از آن، بی‌نهایت باشد. فرض می‌شود که فقط یک الکترون و یک حفره که نسبت به هم جاذبه کولنی دارند در داخل نقطه کوانتومی موجود باشد. با این فرضیات، هر نقطه کوانتومی (با هر شکل و هندسه‌ای) و الکترون‌ها و حفره‌های محبوس در آن به سادگی با یک چاه کوانتومی سه‌بعدی (با دیواره بی‌نهایت) که یک الکترون (با جرم مؤثر  $m_e$ ) و یک حفره (با جرم مؤثر  $m_h$ ) در آن واقع هستند و برهمکنش برخوردی با دیواره نقطه و نیز برهمکنش کولنی با خودشان دارند مدل می‌شود. در شکل ۱ طرحی از یک نقطه کوانتومی مخروطی و نیز الکترون و حفره محبوس در آن نشان داده شده است.



شکل ۱ طرحی از یک نقطه کوانتومی مخروطی با قاعده کروی (الف) و برشی از آن به همراه الکترون و حفره محبوس در آن (ب).

حتی برای این مدل بسیار ساده نیز حل معادله شرودینگر شش متغیره (سه متغیر برای الکترون و سه تا برای حفره) که شامل پتانسیل برهمکنشی کولنی باشد به صورت تحلیلی امکان پذیر نیست و به ناچار باید در گیر روش های عددی و محاسباتی شد. الگوریتم های متنوعی مانند روش وردشی یا روش های اختلالی می توان برای حل این مسئله پیشنهاد کرد که در اینجا از یک روش اختلالی به نام ”برهمکنش پیکربندی“ برای حل عددی معادله شرودینگر و یافتن انرژی و توابع موج اکسیتونی استفاده می شود [۵، ۱۳، ۱۴]. روش کار این گونه است: ابتدا معادله شرودینگر برای تک ذره محبوس در نقطه کوانتومی مخروطی به صورت تحلیلی حل می شود و توابع موج تک ذره ای الکترون و حفره به دست می آیند. سپس، با ترکیب این توابع موج تک ذره ای، توابع موج دودره ای ساخته می شوند. با به کار گیری این توابع موج دودره ای الکترون-حفره و هامیلتونی برهمکنشی کولنی در روش اختلالی منتخب، توابع موج و انرژی های اکسیتونی محاسبه می شوند.

### ۲-۱. انرژی و توابع موج تک ذره ای

برای یافتن توابع موج تک ذره ای، معادله شرودینگر در داخل نقطه کوانتومی مخروطی که دارای پتانسیل صفر است (و روی دیواره و بیرون از آن پتانسیل بی نهایت دارد) در مختصات کروی به شکل زیر نوشته می شود [۱۱]،

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (1)$$

که در آن،  $M$  جرم ذره (الکترون یا حفره) و  $\hbar$  نیز ثابت کاسته پلانک است. در روش جداسازی متغیرها، تابع موج به صورت حاصل ضرب زیر نوشته می شود

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (2)$$

با این شکل، معادله شرودینگر سه متغیره (۱) به سه معادله تک متغیره تبدیل می شود،

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{v(v+1)}{r^2} R = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin(\theta) \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left( \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} - v(v+1) \right) \Theta = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi$$

از قسمت اول رابطه (۳) که همان معادله بسل کروی است، تابع موج شعاعی و انرژی  $k^2 = \frac{2ME}{\hbar^2}$  به دست می آید. رابطه دوم هم معادله دیفرانسیل لژاندر (یا به عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل عملگر تکانه زاویه ای  $L^2$ ) است که کوانتوم تکانه زاویه ای  $v$  و تابع موج قطبی را تولید می کند. معادله سوم نیز فرمول نوسانگر هماهنگ ساده با جواب  $e^{im\varphi}$  است که حاکم بر مؤلفه محوری تکانه زاویه ای ( $L_z$ ) با عدد کوانتومی  $m$  است. عدد  $m$  می تواند هر مقدار صحیحی به خود بگیرد ولی  $v$  بر خلاف مسائل دارای پتانسیل متقارن کروی (که معمولاً با  $l$  نمایش داده می شود و فقط مقادیر صحیح و مثبت ۰، ۱، ۲ و ... را می پذیرد) به دلیل محدودیت زاویه قطبی نقطه کوانتومی (یعنی  $0 \leq \theta \leq \gamma$  طبق شکل ۱) فقط مقادیر خاص و البته مثبت را قبول می کند. مقادیر مجاز  $v$  را می توان با اعمال شرط مرزی  $\Theta(\gamma) = 0$  (که از صفر شدن تابع موج قطبی در یال جانبی نقطه کوانتومی مخروطی نشأت می گیرد) به طور عددی برای هر  $m$  دلخواه به دست آورد. برای مثال، در نقطه کوانتومی با  $\gamma = \pi/4$ ، تعدادی از مقادیر مجاز  $v$  برای  $m$  های مختلف در جدول ۱ آورده شده است.

### جدول ۱ تعدادی از $v$ های مجاز محاسبه شده برای $m$ های مختلف

در یک نقطه کوانتومی دارای زاویه رأس  $\gamma = \pi/4$ .

	$m = 0$	$m = \pm 1$	$m = \pm 2$	$m = \pm 3$	$m = \pm 4$
اولین $v$ مجاز	۲,۵۴۷۹	۴,۴۰۵۳	۶,۱۳۸۷	۷,۸۱۱۶	۹,۴۴۷۲
دومین $v$ مجاز	۶,۵۲۲۲	۸,۴۴۷۱	۱۰,۲۷۸۱	۱۲,۰۵۰۸	۱۳,۷۸۳۱
سومین $v$ مجاز	۱۰,۵۱۴۳	۱۲,۴۶۳۳	۱۴,۳۳۸۹	۱۶,۱۶۳۴	۱۷,۹۴۹۷

همانطور که از جدول ۱ مشخص است، روابط آشنای  $v = 0, 1, 2, \dots$  و  $-v \leq m \leq v$  که در مسائلی با تقارن کروی (یعنی شامل کل زاویه قطبی  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) برقرار هستند در نقطه کوانتومی مخروطی

صادق نیستند و علت آن نیز همان‌طور که در بالا اشاره شد ناشی از محدود بودن زاویه قطبی نقطه کوانتومی بین  $0$  و  $\gamma$  است. با داشتن مقادیر  $\nu$ ، جواب معادله لژاندر (۳) که همان تابع لژاندر وابسته نوع اول  $P_\nu^m(\theta)$  است، به دست می‌آید. جواب معادله بسل کروی (۳) نیز تابع بسل کروی  $j_\nu(kr)$  است. انرژی نیز با اعمال شرط مرزی  $j_\nu(ka) = 0$  (که ناشی از صفر شدن تابع موج شعاعی در قاعده نقطه کوانتومی است) به صورت عددی (از طریق صفرهای تابع بسل کروی) به دست می‌آید. تابع موج تک‌ذره‌ای هم در نهایت به صورت حاصل ضرب تابع بسل کروی، تابع لژاندر نوع اول و جواب معادله نوسانگر هماهنگ ساده به صورت زیر ساخته خواهد شد،

$$\psi(r, \theta, \varphi) = j_\nu(kr) P_\nu^m(\theta) e^{im\varphi} \quad (۴)$$

یک برنامه کامپیوتری در محیط Mathematica توسط نویسندگان مقاله نوشته شده است که با دریافت مشخصات نقطه کوانتومی شامل زاویه  $\gamma$  و شعاع انحناى قاعده  $a$  و همچنین جرم مؤثر الکترون و حفره، ابتدا مقادیر مجاز عدد کوانتومی  $\nu$  را محاسبه می‌کند و سپس انرژی‌ها و توابع موج تک‌ذره‌ای (الکترون و حفره) را به دست می‌دهد [۱۱، ۱۲].

## ۲-۲. انرژی و توابع موج دودره‌ای و اکسیتونی

با داشتن توابع موج تک‌ذره‌ای، به سادگی می‌توان با ضرب کردن آنها در یکدیگر توابع موج چندذره‌ای تولید کرد. در مقاله حاضر که بحث الکترون و حفره مجبوس در نقطه کوانتومی مطرح است با ضرب تابع موج تک‌ذره‌ای الکترون در تابع موج تک‌ذره‌ای حفره بدون هیچ نیازی به مقارن‌سازی یا پادمقارن‌سازی می‌توان تابع موج دودره‌ای الکترون-حفره را به شکل زیر ایجاد کرد

$$\begin{aligned} \psi(r_e, \theta_e, \varphi_e, r_h, \theta_h, \varphi_h) = \\ C j_{\nu_e}(k_e r_e) P_{\nu_e}^{m_e}(\theta_e) e^{im_e \varphi_e} \\ \times j_{\nu_h}(k_h r_h) P_{\nu_h}^{m_h}(\theta_h) e^{im_h \varphi_h} \end{aligned} \quad (۵)$$

که در آن،  $C$  ثابت بهنجارش است و اندیس‌های  $e$  و  $h$  هم معرف الکترون و حفره می‌باشند. انرژی هر یک از این توابع موج دودره‌ای نیز با مجموع انرژی الکترون و حفره سازنده آن برابر است. کد رایانه‌ای مذکور قادر است که تعداد دلخواهی از این توابع موج دودره‌ای را تولید کرده و از آنها در ساخت توابع موج اکسیتونی استفاده نماید.

حال که توابع موج دودره‌ای غیر برهمکنشی الکترون-حفره ساخته شدند، راه به سوی محاسبه تابع موج اکسیتونی که از برهمکنش کولنی الکترون-حفره سرچشمه می‌گیرد باز شده است. در ساخت توابع موج دودره‌ای فوق‌الذکر (رابطه (۵)) هیچ برهمکنشی بین الکترون و حفره لحاظ

نشده بود و آنها فقط با دیواره نقطه کوانتومی اندرکنش برخوردار داشتند. اکنون، به الکترون و حفره اجازه داده می‌شود که از طریق جاذبه کولنی زیر با هم برهمکنش کنند،

$$H_{int}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) = -\frac{1}{4\pi K \epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_e - \vec{r}_h|} \quad (6)$$

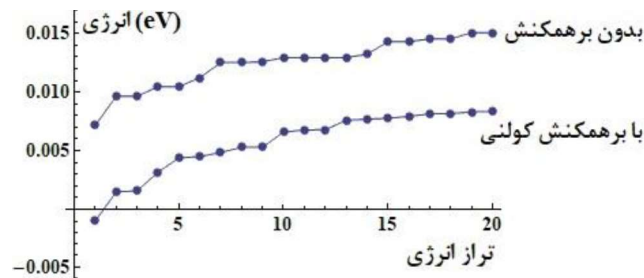
که در آن، منظور از  $H_{int}$  همان هامیلتونی برهمکنشی،  $e$  بار الکترون،  $K$  ثابت دی الکتریک نقطه کوانتومی و  $\epsilon_0$  گذردهی الکتریکی خلأ است. اگر این پتانسیل برهمکنشی از همان اول در معادله شرودینگر (۱) لحاظ شده بود به سختی می‌شد روش عددی مناسبی برای حل آن پیدا کرد، ولی نادیده گرفتن این پتانسیل در آن مرحله باعث شد که بتوان توابع موج دودره‌ای الکترون-حفره را به سادگی و به صورت تحلیلی به دست آورد تا از آنها در یک روش اختلالی برای یافتن توابع موج اکسیتونی استفاده کرد. قبل از لحاظ نمودن پتانسیل برهمکنش (۶)، توابع موج سیستم الکترون-حفره غیر برهمکنشی همان توابع موج دودره‌ای (۵) بود. با اعمال  $H_{int}$ ، این سیستم دودره‌ای مختل می‌شود و بنا بر نظریه‌های اختلال می‌توان تابع موج مختل شده را بر حسب توابع موج مختل نشده به دست آورد. بدین ترتیب که ابتدا تعداد مناسبی از توابع موج دودره‌ای به ترتیب از پایین‌ترین حالت انرژی انتخاب می‌شود. هرچه این تعداد بیشتر باشد دقت در محاسبه توابع موج اکسیتونی (و البته زمان اجرای محاسبات) نیز بیشتر خواهد. این توابع موج در حقیقت پایه‌های فضای کوانتومی برای بسط تابع موج اکسیتونی را تشکیل می‌دهند. سپس، ماتریس هامیلتونی برهمکنش  $H_{int}$  در این پایه‌ها به دست می‌آید بدین صورت که مقدار چشم‌داشتی آن در پایه‌های لحاظ شده محاسبه می‌شود. این قسمت از الگوریتم بسیار وقت گیر است و زمان زیادی برای محاسبه درایه‌های ماتریسی شامل انتگرال‌های ۶ بعدی (سه مختصه الکترونی و سه مختصه حفره) صرف خواهد شد. با قطری‌سازی این ماتریس، ویژه‌بردارها (که همان ضرایب بسط تابع موج اکسیتونی بر حسب پایه‌های مذکور هستند) و نیز ویژه مقادیر (یا همان انرژی‌های اکسیتونی) به دست می‌آیند. برنامه رایانه‌ای مزبور، بعد از ساخت تعداد مناسبی از پایه‌ها، تمام درایه‌های ماتریس هامیلتونی کولنی را به دست آورده و ماتریس را قطری می‌کند و توابع موج و انرژی‌های اکسیتونی را به دست می‌دهد. با داشتن این توابع موج می‌توان اطلاعات جدید و دقیقی از فیزیک اکسیتون در داخل نقاط کوانتومی مخروطی کسب کرد که در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

### ۳. نتایج محاسبات و بررسی آنها

برای انجام محاسبات با کد رایانه‌ای مذکور می‌توان هر نقطه کوانتومی مخروطی با زاویه و شعاع دلخواه را که از یک نیم‌رسانای اختیاری با جرم مؤثر الکترونی و حفره‌ای مشخص و ثابت



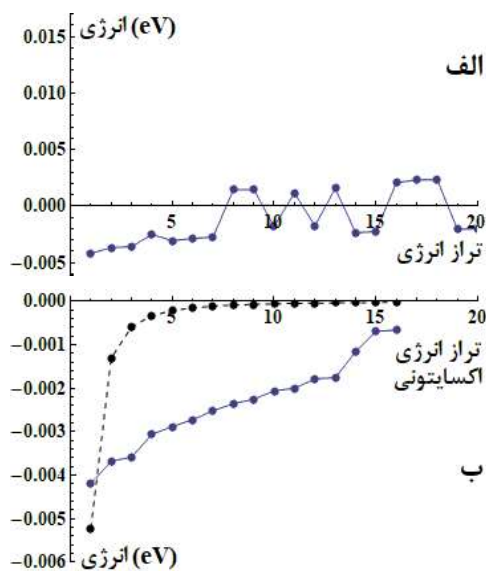
دی الکتريک معلوم ساخته شده باشد، لحاظ کرد. باید دقت داشت که جرم مؤثر الکترون چیزی متفاوت با جرم واقعی الکترون است و در واقع جرم مؤثری است که اثرات مربوط به ساختار نواری نیمرسانا در آن لحاظ شده است. جرم مؤثر الکترون از یک نیمرسانا به نیمرسانای دیگر و حتی در یک نیمرسانای مشخص از یک نوار انرژی به نوار دیگر متفاوت است. حفره هم که در حقیقت جای خالی الکترون در نوار ظرفیت است نیز همین خاصیت را دارد و واضح است که حفره یک شبه ذره با بار مثبت بوده و کاملاً با پروتون و پوزیترون و ... تفاوت دارد. برای انجام محاسبات یک نقطه کوانتومی در نظر می گیریم که زاویه دلخواه  $45^\circ$  و شعاع  $75 \text{ nm}$  از نیمرسانای GaAs با ثابت دی الکتريک  $K=10$ ، جرم مؤثر الکترونی  $m_e=0.067 m_0$  و جرم مؤثر حفره  $m_h=1.33 m_0$  دارد که در آن  $m_0$  جرم سکون الکترون است [۵]. ابتدا، کد مذکور برای یافتن انرژی ها و توابع موج اکسیتونی در داخل این نقطه کوانتومی اجرا می شود. برای انجام این کار از ۱۵ تابع موج تک ذره ای (که  $15^2$  تابع موج دودره ای غیر برهمکنشی ایجاد می کند) استفاده می شود. اجرای برنامه با یک رایانه رومیزی دوهسته ای با پردازنده  $2.5$  گیگا هرتز حدود ۲۰ ساعت طول می کشد که قسمت اعظم آن مربوط به محاسبه ماتریس هامیلتونی برهمکنش است. در شکل ۲ انرژی ۲۰ حالت کوانتومی الکترون-حفره با داشتن برهمکنش کولنی به ترتیب انرژی ترسیم شده است. انرژی توابع موج دودره ای غیر برهمکنشی الکترون-حفره نیز جهت مقایسه آورده شده است.



شکل ۲ انرژی حالت های کوانتومی الکترون و حفره مقید در داخل نقطه کوانتومی مخروطی بدون لحاظ کردن جاذبه کولنی و با لحاظ کردن آن.

از شکل ۲ مشخص است که انرژی همه ترازهای برهمکنشی از انرژی ترازهای متناظر غیر برهمکنشی کمتر است، مثلاً تراز اول بدون برهمکنش، انرژی  $0.007 \text{ eV}$  دارد ولی با برهمکنش کولنی به مقدار  $0.001 \text{ eV}$  کاهش یافته است. علت این رخداد در حقیقت همان جاذبه کولنی بین الکترون و حفره است که انرژی پتانسیل منفی دارد و باعث پایین آمدن سطح انرژی ترازها شده است. به عبارت دیگر، برهمکنش کولنی بین الکترون و حفره باعث می شود که

انرژی تمامی حالت‌های دوزره‌ای غیر برهمکنشی کاهش یابد تا حدی که حالت پایه آن یک انرژی منفی (در اینجا با مقدار  $E_1 = -0,001 \text{ eV}$ ) به خود بگیرد. به نظر می‌رسد که تنها حالت مقید الکترون-حفره که به اکسیتون معروف است باید همین حالت با انرژی منفی باشد ولی باید دقت داشت که این انرژی‌ها حاصل جمع انرژی برهمکنشی الکترون-حفره با انرژی حرکت کلی سیستم الکترون-حفره یا همان انرژی جنبشی مرکز جرم هستند که همیشه مقدار مثبت دارد. برای اینکه بتوان تمام حالت‌های مقید الکترون-حفره را شناسایی کرد لازم است که انرژی مرکز جرم از انرژی‌های برهمکنشی شکل ۲ کم شود. در شکل ۳ الف این انرژی‌ها برای ۲۰ تراز اول نشان داده شده است که ۱۳ عدد از آنها انرژی منفی و مابقی مثبت دارند. برای ترازهای بالاتر از ۲۰ هم سه تراز با انرژی منفی وجود دارد (که در شکل ۳ الف آورده نشده‌اند) و سایر ترازها نیز همگی انرژی مثبت دارند. ۱۶ تراز که انرژی منفی دارند به ترتیب انرژی از کوچک به بزرگ در شکل ۳ ب مشخص شده‌اند.



**شکل ۳** انرژی حالت‌های کوانتومی برهمکنشی الکترون-حفره داخل نقطه کوانتومی مخروطی بعد از کم کردن انرژی مرکز جرم (الف). تمامی انرژی‌های منفی به دست آمده بعد از کم کردن انرژی مرکز جرم و انرژی یک اکسیتون آزاد به صورت نمودار نقطه چین (ب).

این حالت‌های کوانتومی با انرژی‌های خالص منفی در حقیقت حالت‌های مقید الکترون-حفره یا همان اکسیتون‌ها می‌باشند. در این حالت‌های اکسیطونی، الکترون و حفره در عین حالی که در

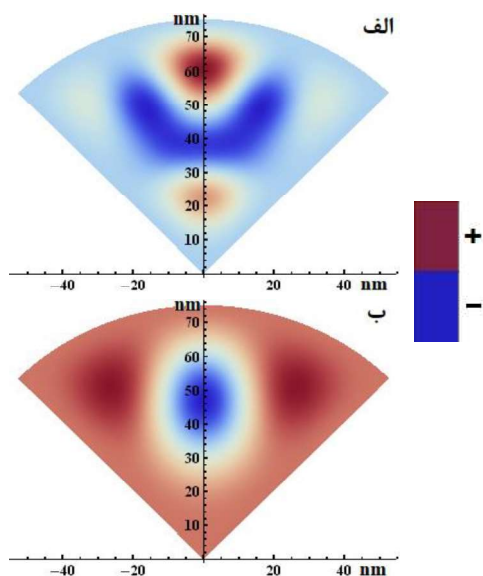
داخل نقطه کوانتومی محبوس هستند به یکدیگر نیز از طریق جاذبه کولنی مقیدند. البته در این مثال نوعی، فقط ۱۶ حالت اکسیتونی مقید ایجاد شده است ولی برای نقاط کوانتومی با هندسه و ثوابت فیزیکی متفاوت امکان دارد تعداد حالات اکسیتونی کمتر یا بیشتری ظاهر شود. واضح است که تعداد این حالات مقید محدود است و این یکی از ویژگی‌های اصیل نقاط کوانتومی است که طبق آن حبس کوانتومی و اثر دیواره‌ها باعث می‌شود که تشکیل پیوند الکترون-حفره در مقایسه با فضای آزاد درون یک نیم‌رسانای کپه‌ای سخت‌تر و محدودتر باشد. محدود بودن تعداد حالات مقید اکسیتونی از این واقعیت نشأت می‌گیرد که در ترازهای بالاتر سهم انرژی جنبشی الکترون و حفره (و به تبع آن انرژی جنبشی مرکز جرم) بیشتر می‌شود و از آنجا که انرژی جنبشی کمیت مثبتی است مقدار آن از انرژی پتانسیل جاذبه الکترون و حفره (که منفی است) بیشتر می‌شود و در نتیجه انرژی کل مقداری مثبت خواهد داشت. از این رو، تعداد حالات مقید اکسیتونی در داخل نقطه کوانتومی با محدودیت مواجه می‌شود. اگر جاذبه کولنی الکترون-حفره تحت تأثیر حبس کوانتومی قرار نداشت آنگاه مانند یک اتم هیدروژن گونه با انرژی زیر رفتار می‌کرد [۱۵]،

$$E_n = -\frac{\mu}{2\hbar^2} \left( \frac{e^2}{4\pi K \epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{n^2} \quad (7)$$

که در آن،  $\mu$  جرم کاسته الکترون-حفره و  $n$  هم عددی طبیعی است. نمودار انرژی اکسیتون مقید و نمودار انرژی اکسیتون آزاد حاصل از رابطه (۷) در شکل ۳ تبیین شده است. جالب است که نمودار انرژی اکسیتون مقید در نقطه کوانتومی رفتار تقریباً خطی دارد و ترازهای انرژی به صورت نردبانی با فواصل تقریباً یکسان از هم قرار گرفته‌اند در حالیکه این رفتار برای اکسیتون آزاد طبق رابطه (۷) به شکل هذلولوی است. از روی نمودار مشخص است که انرژی حالت پایه اکسیتون آزاد (یعنی  $n=1$  در فرمول (۱)) دارای مقدار  $E_1 = -0,0052 \text{ eV}$  است در حالی که انرژی حالت پایه اکسیتون مقید در نقطه کوانتومی دارای مقداری برابر با  $-0,0042 \text{ eV}$  است. این بدان معناست که حبس کوانتومی باعث شده که حالت پایه اکسیتون محبوس در نقطه کوانتومی، انرژی پیوندی الکترون-حفره ضعیف‌تری نسبت به اکسیتون فضای آزاد داشته باشد. البته به این نکته نیز باید دقت کرد که با محبوس کردن الکترون و حفره در یک فضای نانومتری، نیروی جاذبه خیلی قوی بین آنها ظاهر می‌شود ولی این دلیل نخواهد شد که حالت مقید محکم‌تری ایجاد کند. به عبارت دیگر، دیواره نقطه کوانتومی باعث خواهد شد که تأثیر جاذبه کولنی ضعیف شده و الکترون و حفره حتی در فاصله بسیار نزدیک به هم نیز به سختی بتوانند حالت مقید تشکیل دهند. جالب اینجاست که سایر حالات اکسیتونی مقید در نقطه کوانتومی طبق نمودار شکل ۳ انرژی کمتری

نسبت به اکسیتون آزاد دارند. به عبارت دیگر، حالت‌های اکسیتونی محبوس در نقطه کوانتومی (غیر از حالت پایه) وضعیت مقیدتر و محکم‌تری نسبت به حالت‌های مشابه اکسیتون آزاد دارند. شاید این پدیده را بتوان به این حقیقت مرتبط کرد که شعاع اکسیتونی یک اکسیتون آزاد با افزایش شماره تراز افزایش می‌یابد، در حالی که برای اکسیتون محبوس در نقطه کوانتومی، افزایش شماره تراز هیچ تأثیری در شعاع اکسیتونی ندارد زیرا بیشترین اندازه‌ای که اکسیتون محبوس در نهایت می‌تواند به خود بگیرد همان اندازه نقطه کوانتومی است.

حال به محاسبه توزیع بار الکتریکی در داخل نقطه کوانتومی و دوقطبی الکتریکی حاصل از آن می‌پردازیم. در شکل ۴، توزیع بار الکتریکی در داخل نقطه کوانتومی برای حالت پایه اکسیتونی و اولین حالت برانگیخته آن (که با استفاده از توابع موج اکسیتونی محاسبه شده به دست آمده‌اند) آمده است. از این شکل‌ها کاملاً مشخص است که نحوه توزیع بار مثبت و منفی اکسیتون در داخل نقطه کوانتومی به حالت کوانتومی آن بستگی دارد. بار منفی در حالت پایه در نواحی مرکزی و بار مثبت نیز در سمت قاعده و رأس مخروط توزیع شده است. برای اولین حالت برانگیخته، بار منفی در مرکز نقطه و بار مثبت نیز در اطراف آن توزیع شده است. در سایر حالت‌های کوانتومی نیز (که در اینجا ترسیم نشده‌اند) وضعیت‌های مختلف و متنوعی از توزیع بار دیده می‌شود.



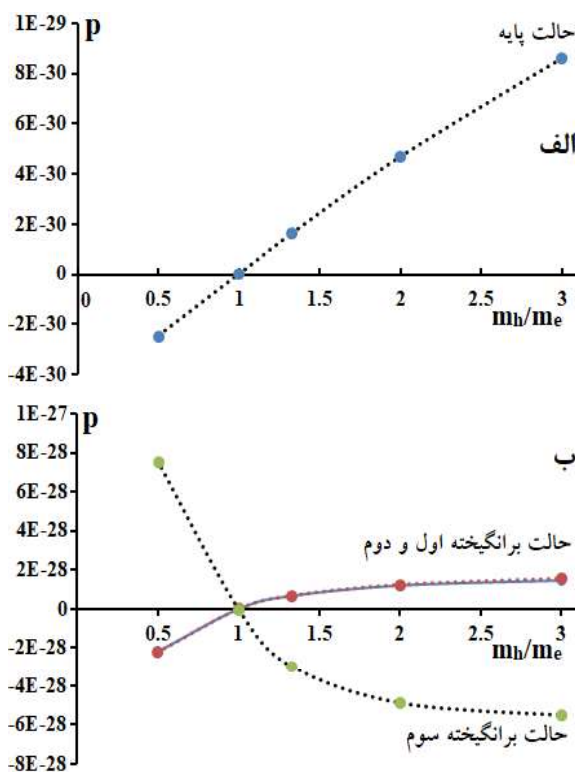
شکل ۴ توزیع بار الکتریکی در داخل نقطه کوانتومی مخروطی برای حالت پایه اکسیتونی (الف)، و اولین حالت برانگیخته آن (ب).

از آنجا که مرکز بار مثبت و منفی در هیچیک از این حالت‌ها روی هم نیافتاده است احساس می‌شود که اکسیتون باید ممان دوقطبی الکتریکی داشته باشد. به راحتی با داشتن توزیع بار و استفاده از تعریف ممان دوقطبی الکتریکی به صورت زیر می‌توان قطبش اکسیتون را در هر حالت کوانتومی محاسبه کرد،

$$\vec{p} = \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad (۸)$$

که در آن،  $V$  حجم نقطه کوانتومی،  $\rho$  چگالی بار الکتریکی و  $r$  نیز بردار مکان المان بار در داخل نقطه کوانتومی است. محاسبات نشان می‌دهد که جهت ممان دوقطبی حالت پایه و حالت برانگیخته اول به سمت قاعده مخروط و به ترتیب دارای مقادیر  $1.64 \times 10^{-30} C.m$  و  $6.57 \times 10^{-29} C.m$  است. به وجود آمدن چنین دوقطبی الکتریکی خیلی جالب است، زیرا اکسیتون و در کل هر اتم هیدروژن گونه در فضای آزاد هرگز نمی‌تواند در ویژه‌حالت‌های انرژی‌اش ممان دوقطبی الکتریکی داشته باشد، زیرا پتانسیل کولنی‌اش تقارن کروی دارد. وضعیت برای وقتی که چنین اتم هیدروژن گونه‌ای در داخل نقطه کوانتومی مخروطی حبس شده باشد متفاوت است زیرا جاذبه متقارن کولنی تحت تأثیر برهمکنش نامتقارن با دیواره نقطه کوانتومی قرار می‌گیرد که در نهایت سبب ایجاد دوقطبی دائمی در آن می‌شود. سؤالی که پیش می‌آید این است که منشأ این دوقطبی الکتریکی چیست؟ الکترون و حفره، غیر از علامت بار الکتریکی، تنها تفاوتی که با هم دارند در جرم آنهاست و این دوقطبی باید از اختلاف جرم آنها نشأت گرفته باشد. این بدان معنی است که چون الکترون و حفره جرم‌های متفاوتی دارند برهمکنش آنها با دیواره نقطه کوانتومی (که از نوع برخوردی است) باعث می‌شود یک دوقطبی الکتریکی در راستای محور مخروط شکل گیرد. برای تأیید این ادعا محاسبات متعددی با جرم‌های مختلف الکترون و حفره انجام شد. در شکل ۱الف ممان دوقطبی الکتریکی مربوط به حالت پایه اکسیتونی بر حسب نسبت جرمی  $m_h/m_e$  آمده است. این نمودار به خوبی نشان می‌دهد که وقتی جرم حفره و الکترون برابر باشد (یعنی  $m_h/m_e=1$ )، هیچ ممان دوقطبی در اکسیتون ایجاد نمی‌شود ولی همین که جرم آنها متفاوت می‌شود نقطه کوانتومی شروع به قطبیده شدن می‌کند. در حالت پایه (همانطور که از روی نمودار هم معلوم است) وقتی که جرم حفره از الکترون بیشتر باشد ممان دوقطبی ایجاد شده مثبت است (یعنی جهت آن به سمت قاعده مخروط در شکل ۱ است) ولی هنگامی که جرم حفره کمتر می‌شود علامت ممان منفی می‌شود. از آنجا که جهت ممان دوقطبی از سمت بار منفی به سمت بار مثبت است این نکته فاش می‌شود که در حالت پایه اکسیتون محبوس در نقطه کوانتومی مخروطی، باری که از لحاظ جرمی سبک‌تر است بیشتر در نیمه رأسی مخروط توزیع می‌شود و باری که

سنگین تر است در نیمه قاعده‌ای آن پخش می‌شود. این یک یافته مهم است و تا جایی که نویسندگان مقاله اطلاع دارند برای اولین بار است که گزارش می‌شود. البته باید مد نظر داشت پیش بینی چنین پدیده‌ای از طریق شبیه‌سازی صورت گرفته است و هنوز هیچ گزارش تجربی که مؤید آن باشد، نویسندگان مشاهده نکرده‌اند.

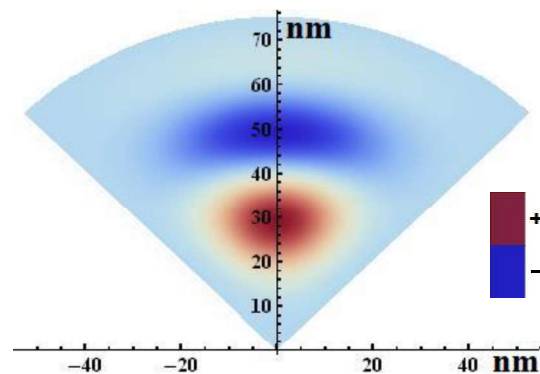


شکل ۵ ممان دوقطبی الکتریکی ایجاد شده در نقطه کوانتومی مخروطی برای حالت پایه (الف) و حالت‌های برانگیخته (ب) بر حسب نسبت جرمی  $m_h/m_e$ .

در شکل ۵ب نیز ممان دوقطبی اکسیتون در اولین و دومین و سومین حالت برانگیخته آورده شده است. این نمودارها نشان می‌دهد که اولین و دومین حالت برانگیخته رفتاری مشابه دارند و در واقع تبهگن هستند و نمودار آنها بر روی هم افتاده است. در این دو حالت نیز (مشابه با حالت پایه) بیشتر بودن جرم حفره از الکترون باعث ایجاد ممان مثبت و کمتر بودن آن سبب ایجاد ممان منفی شده است. وضعیت برای سومین حالت برانگیخته متفاوت است. در این حالت ممان برای حفره سنگین تر از الکترون دارای علامت منفی است و برای حفره سبک‌تر علامت مثبت دارد. برای

۴۰ / بررسی محاسباتی اثر تفاوت جرم الکترون و حفره بر ممان دوقطبی الکتریکی اکسیتون در نقطه ...

اینکه بتوان دید بهتری نسبت به حالت برانگیخته سوم داشت در شکل ۶ توزیع بار آن آورده شده است. از شکل کاملاً واضح است که بار منفی در نواحی مرکزی قرار گرفته و بار مثبت نیز پایین تر از آن و در نزدیکی رأس مخروط واقع شده است و همین باعث شده جهت ممان دوقطبی آن و تابعیت آن بر حسب  $m_h/m_e$  رفتاری متفاوت با حالت پایه و حالات برانگیخته اول و دوم (طبق شکل ۵ب) داشته باشد.



شکل ۶ توزیع بار الکتریکی در داخل نقطه کوانتومی مخروطی برای حالت برانگیخته سوم.

دقت در توزیع بار حالت پایه و حالات برانگیخته اول تا سوم (شکل های ۴ و ۶) این نکته را فاش می کند که بار منفی در همه آنها در ناحیه مرکزی نقطه کوانتومی بوده و بار مثبت نیز در نواحی خارج از مرکز توزیع بیشتری دارد. علت این نوع توزیع بار را باید در تفاوت انرژی جنبشی الکترون و حفره سازنده اکسیتون جست و جو کرد. هرچه انرژی جنبشی ذره کم باشد احتمال یافتن آن در نواحی مرکزی بیشتر است و هرچه انرژی جنبشی بیشتر باشد احتمال یافتن آن در نواحی دور از مرکز زیاد است درست مثل حرکت دایره ای که هرچه سرعت جسم بیشتر باشد شعاع دایره مسیر (و دوری آن از مرکز دایره) نیز بیشتر است و بالعکس. از آنجا که جرم حفره در شبیه سازی ها در شکل های ۴ و ۶ بیشتر از جرم الکترون است پس انرژی جنبشی بیشتری از الکترون دارد و انتظار می رود که الکترون در نواحی مرکزی و حفره نیز دورتر از مرکز باشد که شبیه سازی ها نیز آن را تأیید می کند.

شبیه سازی ها همگی مؤید این مطلبند که تفاوت جرم الکترون و حفره در نقاط کوانتومی مخروطی باعث ایجاد یک قطبش اولیه در اکسیتون می شود که راستای آن محوری است و جهت آن بسته به حالت کوانتومی اکسیتون تغییر می کند. ممکن است این سؤال پیش آید که آیا

حالت‌های غیر برهمکنشی الکترون-حفره که هیچ جاذبه کولنی بین الکترون و حفره لحاظ نمی‌کنند نیز قطبش الکتریکی خواهند داشت یا نه؟ محاسبه توزیع بار الکتریکی و قطبش برای این حالت‌های دوزره‌ای غیر برهمکنشی نشان می‌دهد که با هر نسبت جرمی  $m_h/m_e$ ، حالت پایه فاقد قطبش الکتریکی است ولی سایر حالت‌ها (بسته به تابع موج الکترون و تابع موج حفره سازنده آن) می‌توانند قطبش الکتریکی داشته باشند. تأثیری که از لحاظ کردن برهمکنش کولنی بین الکترون و حفره حاصل می‌شود این است که یک قطبش الکتریکی در حالت پایه القاء می‌کند. این قطبش تنها برای حالتی که جرم الکترون و حفره برابر باشد صفر خواهد شد. در سایر حالت‌های برهمکنشی نیز (البته تا جایی که محاسبات عددی اجازه مطالعه و بررسی آنها را می‌داد) اینگونه مشخص شد که لحاظ کردن جاذبه کولنی باعث می‌شود که قطبش اولیه موجود در آنها (یعنی قبل از اعمال جاذبه کولنی) کاهش پیدا کند. این فرایند را می‌توان اینطور توجیه کرد که فاصله متوسط الکترون-حفره در حالت‌های غیر برهمکنشی از فاصله متوسط آنها در حضور جاذبه کولنی بیشتر است به همین دلیل ممان بیشتری خواهند داشت. به عبارت دیگر، خلق اکسیتون در حالت‌های غیر پایه به نزدیک‌تر شدن الکترون و حفره به هم می‌انجامد و قطبش را کاهش می‌دهد.

حالت‌های برهمکنشی غیر مقید که در آنها جاذبه کولنی بین الکترون و حفره وجود دارد ولی حالت مقیدی به نام اکسیتون تشکیل نشده است نیز بسیار جالب و محل بحث است. پژوهش درباره این حالت‌های برهمکنشی غیر اکسیتونی که به نوعی گاز و پلاسمای کوانتومی الکترون-حفره و اکسیتون هستند مد نظر مقاله حاضر نیست و می‌توان به عنوان یک پژوهش مجزا در جای دیگری مد نظر قرار داد.

#### ۴. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به قطبش اکسیتون محبوس در یک نقطه کوانتومی مخروطی از طریق محاسبات عددی پرداخته شد. ابتدا انرژی‌ها و ویژه‌توابع اکسیتون به روش "برهمکنش پیکربندی" به دست آمد. معلوم شد که انرژی اکسیتون محبوس در داخل نقطه کوانتومی بر خلاف اکسیتون آزاد (که بر حسب شماره تراز به صورت هذلولوی است) رفتاری خطی دارد. در ادامه، قطبش اکسیتون برای حالت پایه و چند حالت برانگیخته به دست آمد و مشخص شد که این حالت‌ها قطبش الکتریکی دائمی دارند. بررسی جرم‌های مختلفی از الکترون و حفره نشان داد که این قطبش ناشی از تفاوت جرم آنهاست به نحوی که برای جرم‌های مساوی هیچیک از حالت‌های اکسیتونی دارای قطبش الکتریکی نبودند.



این قطبش وابسته به اختلاف جرم الکترون و حفره (که در فضای نامتقارن نقطه کوانتومی مخروطی بروز کرده است) می‌تواند کاربردهای بالقوه زیادی داشته باشد. البته از آنجا که اکسیتون‌ها در دماهای خیلی پایین تشکیل می‌شوند پس باید انتظار داشت که اثر قطبش وابسته به جرم فقط در دماهای پایین مشاهده شود. این قطبش عاملی برای برهمکنش‌های الکتریکی بین خود نقاط کوانتومی در نظر گرفته می‌شود. مانند نیروهای لاندن که از دوقطبی‌های الکتریکی لحظه‌ای و تصادفی برقرار شده بین اتم‌ها نشأت می‌گیرند این دوقطبی وابسته به اختلاف جرم نیز خواهد توانست منشأ برهم‌کنش بین نقاط کوانتومی (که به نوعی اتم‌های مصنوعی هستند) شود و در توسعه مواد کوانتومی جدید کاربرد داشته باشد. البته انتظار می‌رود که قطبش ناشی از اختلاف جرم فقط مختص نقاط کوانتومی مخروطی نباشد و شامل تمام نقاط کوانتومی فاقد مرکز تقارن نیز شود.

در اینجا تأثیر زاویه مخروط در قطبش ناشی از تفاوت جرم بررسی نشده است ولی انتظار می‌رود که هرچه زاویه بازتر باشد و به شکل کروی شبیه‌تر شود از اثرات آن کاسته شود و بالعکس هرچه زاویه جمع‌تر باشد و حالت سوزنی ایجاد شود اثرات قطبشی قوی‌تری به دست آید. قطبش ناشی از اختلاف جرم فقط در دنیای نانو و به علت اثرات حبس کوانتومی رخ می‌دهد و شدیداً به شکل و اندازه وابسته است و یک اثر نانومقیاسی است که توسط نویسندگان برای اولین بار (تا جایی که اطلاع دارند) بررسی شده است. وقتی چنین قطبشی با ترمودینامیک و نیز نحوه توزیع هندسی (زاویه و شعاع) و جهت‌گیری نقاط کوانتومی مخروطی ترکیب شود، می‌تواند به واقعیت فیزیکی نزدیک‌تر شود. پژوهش در این موضوعات جزء کارهای آتی نویسندگان مقاله است.

## منابع

- [1] Ellis B., Mayer M. A., Shambat G., Sarmiento T., Harris J., Haller E. E., and Vukovic J., Ultralow-Threshold Electrically Pumped Quantum-Dot Photonic-Crystal Naocavity laser, *Nature Photonics*, **5**, 297-300, 2011.
- [2] Bimberag D., and Pohl U. W., Quantum Dots: Promises and Accomplishments, *Materials Today*, **14**, 388-397, 2011.
- [3] Weisbuch C., Benisty H., and Houdre R., Overview of fundamentals and applications of electrons, excitons and photons in confined structures, *Journal of Luminescence*, **85**, 271-293, 2000.
- [4] Nozik A. J., Multiple Exciton generation in semiconductor quantum dots, *Chem. Phys. Lett.*, **457**, 3-11, 2008.
- [5] Bryant G. W., Excitons in quantum boxes: Correlation effects and quantum confinement, *Physical Review*, **37**, 8763-8772, 1988.
- [6] Voss H., Numerical Calculation of the Electronic Structure for Three-Dimensional Quantum Dots, *Computer Phys. Commun.*, **174**, 441-446, 2006.

- [7] Li Y., Voskoboynikov O., Lee C. P., Sze S. M., and Tretyak O., Electron Energy State Dependence on the Shape and Size of Semiconductor Quantum Dots, *J. App. Phys.*, **90**, 6416-6420, 2001.
- [8] Li Y., Voskoboynikov O., Lee C. P., and Sze S. M., Computer simulation of electron energy levels for different shape InAs/GaAs semiconductor quantum dots, *Computer Phys. Commun.*, **141**, 66-72, 2001.
- [9] Timm R., Eisele H., Lenz A., and *et al*, Structure and intermixing of GaSb/GaAs quantum dots, *Appl. Phys. Lett.*, **85**, 5890-5892, 2004.
- [10] Kazaryan E. M., Petrosyan L. S., Shahnazaryan V. A., and Sarkisyan H. A., Quasi-Conical Quantum Dot: Electron States and Quantum Transitions, *Commun. Theor. Phys.*, **63**, 255-260, 2015.
- [11] Rezvani Jalal M., and Pakdaman Resa E., Energy Levels and Wave Functions in a Conical Quantum Dot, *Proceeding of the Annual Physics Conference of Iran*, Sistan and Baluchestan Univestiry, Zahedan, 8-11 September, 2014 (in Persian).
- [12] Rezvani Jalal M., and Farahani M., Numerical Calculation of Exciton Energy and Wave-Function in a Conic Quantum Dot, *Proceeding of the Annual Physics Conference of Iran*, Yazd Univestiry, Yazd, 28-31 August, 2017 (in Persian).
- [13] Melnik R. V. N., and Zotsenko K. N., Finite element analysis of coupled electronic states in quantum dot nanostructures, *Modeling Simul. Mater. Sci. Eng.*, **12**, 465-477, 2004.
- [14] Harrison P., and Valavanis A., *Quantum wells, wires and dots: theoretical and computational physics of semiconductor nanostructures*, 4<sup>th</sup> Ed., John Wiley & Sons, 197-220, 2016.
- [15] Griffiths D. J., *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, 133-139, 1995.