

Research Paper

The Entanglement of Three-mode Spin Coherent States¹

Kaveh Pasandideh² and Sayed Nasibullah Doustimotlagh^{*3}

Received: 2021.07.01

Revised: 2021.11.16

Accepted: 2021.12.16

Abstract

In this study, the detection method of entanglement of 3-mode spin coherence states is investigated. For this purpose, by properly defining the computational codes, these states are mapped to a three qubit quantum state, and then, by using the Mermin- Kalyshko inequality, the entanglement of these states is studied and an analytical relationship to determine the entanglement region is presented. The results of numerical analysis of the extracted inequality show that the entanglement region of these states depends on the coherence parameters, the amount of spin as well as the phase of the states. For example, in the case where the values of the coherence parameters are equal but with opposite signs, by adjusting the coherence phase, the degree of entanglement can be controlled such that the maximum entanglement occurs $\theta = \pi / 2$. More important, as the value of spin increases, the allowable range of the coherence parameter for entanglement detection increases. These results are consistent with the data reported in the study of the degree of entanglement of 2-mode superposition of spin coherent states using other measures and criteria of entanglement. The findings of this study can be used in the study of non-classical and quantum systems and quantum correlations in quantum information science.

Keywords: *Entanglement, Spin Coherence States, Mermin- Klyshko Inequality, Coherence Parameter.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2021.36748.1221

² Researcher, Supreme National Defense University, Tehran. Iran. Email:Pasandideh.316@gmail.com

³ Assistant Professor, Supreme National Defense University, Tehran, Iran. (Corresponding Author). Email: doustimotlagh@chmail.ir



درهم‌تندگی حالت‌های همدوس اسپینی سه‌مده^۱

کاوه پسندیده^۲ و سید نصیب‌الله دوستی مطلق^{۳*}

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۴/۱۰

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۲۵

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک شیمی، دانشگاه الزهرا

سال یازدهم، پیاپی ۲۷، زمستان ۱۴۰۰

صص ۷۷-۸۹

چکیده:

در این پژوهش نحوه آشکارسازی درهم‌تندگی برهم‌نهی از حالت‌های همدوس اسپینی ۳ مده بررسی می‌شود. برای این منظور با تعریف مناسب کدهای محاسباتی، حالت‌های همدوس ۳ مده به یک حالت سه کیوبیتی نگاشت می‌شوند و سپس با استفاده از نامساوی مرمین-کلاشکو درهم‌تندگی این حالت مطالعه شده و یک رابطه تحلیلی برای تعیین محدوده درهم‌تندگی ارائه می‌شود. نتایج حاصل از بررسی عددی نامساوی استخراج شده نشان می‌دهند که محدوده درهم‌تندگی این حالت‌ها به مقدار پارامتر همدوسی، مقدار اسپین و فاز حالت‌ها بستگی دارد. برای مثال در حالتی که مقدار پارامترهای همدوسی زیر حالت‌ها برابر ولی با علامت مخالف باشند، با تنظیم فاز همدوسی می‌توان میزان درهم‌تندگی را کنترل کرد به طوری که به ازای $\theta = \pi/2$ مقدار نامساوی بیشینه است. با افزایش مقدار اسپین J محدوده مجاز پارامتر همدوسی J برای آشکارسازی درهم‌تندگی افزایش می‌یابد. این نتایج با داده‌های گزارش شده در زمینه مطالعه میزان درهم‌تندگی حالت‌های برهم‌نهی ۲ مده با استفاده از سایر سنج‌ها و معیارهای درهم‌تندگی تطابق دارند. یافته‌های این پژوهش برای بررسی سامانه‌های غیرکلاسیکی و کوانتومی و همبستگی‌های کوانتومی در اطلاعات کوانتومی کاربرد دارند.

واژگان کلیدی: درهم‌تندگی، حالت‌های همدوس اسپینی، نامساوی مرمین-کلاشکو، پارامتر همدوسی.

^۱ DOI: 10.22051/ijap.2021.36748.1221

^۲ پژوهشگر، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران. Email: Pasandideh.316@gmail.com

^۳ استادیار، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران. (نویسنده مسئول). Email: doustimotlagh@chmail.ir

۱. مقدمه

درهم تنیدگی کوانتومی به عنوان یک منبع اساسی برای بسیاری از شاخه‌های نوظهور فیزیک مانند محاسبات و اطلاعات کوانتومی در نظر گرفته می‌شود [۱،۲]. در واقع درهم تنیدگی یک اصل بنیادی در فیزیک کوانتومی است که بیان می‌کند وقتی دو یا چند زیرسامانه تشکیل دهنده یک سامانه کل، با یکدیگر در تماس باشند، تبادل انرژی و برهم کنش انجام دهند، حالت سامانه کل ترکیبی جدایی‌ناپذیر از همه حالت‌های ممکن زیرسامانه‌هایش است به گونه‌ای که احتمال حضور سامانه در هر یک از این زیرسامانه‌ها توسط یک تابع موج مرکب داده می‌شود که متشکل از بردارهای حالت زیر سامانه‌های تشکیل دهنده آن است [۳]. در هم تنیدگی می‌تواند بین ویژگی‌های گوناگونی مانند مکان، اندازه حرکت، زمان، قطبش، اسپین و اندازه حرکت زاویه‌ای ایجاد شود و تا به امروز مطالعات زیادی روی ویژگی‌های غیر کلاسیکی این سامانه‌ها انجام شده است [۴،۵]. در این میان، حالت‌های همدوس از جمله مهمترین حالت‌ها برای ایجاد و بررسی درهم تنیدگی کوانتومی می‌باشند. دلیل این اهمیت سادگی تولید حالت‌های همدوس در آزمایشگاه می‌باشد که یک مزیت مهم برای مطالعه تجربی درهم تنیدگی و کاربردهایش است [۶،۷]. حالت‌های همدوس را می‌توان با سامانه‌های فوتونی، حالت‌های تولید شده با استفاده از اتم‌های دو ترازه و نیز چگالش بوز-انشتین^۱ تولید کرد [۸]. حالت‌های همدوس مختلفی برای بررسی درهم تنیدگی کوانتومی بررسی شده‌اند که از بین آن‌ها می‌توان به حالت‌های همدوس گلابر^۲ و حالت همدوس اسپینی^۳ اشاره کرد [۹-۱۱]. به عنوان یک مطالعه مهم، درهم تنیدگی یک حالت برهم‌نهی از حالت‌های همدوس گلابر دومده در مرجع [۱۲] بررسی شد و شرط لازم و کافی برای بیشینه درهم تنیدگی به صورت قضیه‌ای گزارش شد. به تازگی این مطالعه در کلی‌ترین حالت خود برای حالت‌های همدوس دوکیوبیتی بررسی شده‌اند [۱۳]. همچنین بررسی حالت‌های درهم‌تنیده دومده توجه زیادی را جلب کرده است [۱۴-۱۶]. برای مثال درهم تنیدگی حالت همدوس اسپینی در سامانه دو کیوبیتی در مرجع [۱۷] بررسی شده است و بستگی میزان آن به پارامترهای مختلف مشخص شده است. در مرجع [۶] میزان همبستگی کوانتومی یک برهم‌نهی کیوتریت^۴ (سه گانه) از این حالت‌ها و شرایط لازم برای بیشینه شدن درهم تنیدگی با استفاده از دیسکورد^۵ کوانتومی بررسی شده است.

تعمیم درهم تنیدگی حالت‌های همدوس گلابر دومده به چندمده نیز در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۶،۷،۱۱]. در واقع بررسی سامانه‌های چندمده می‌تواند از نظر بنیادی و کاربردی بسیار مهم باشد. برای مثال بسیاری از مشکلات بنیادی که در بررسی نامساوی بل^۶ برای حالت دومده بوجود می‌آید را می‌توان با استفاده از سامانه‌های سه‌مده از میان برداشت [۱۹،۲۰]. علاوه بر این برای برخی

¹ Bose– Einstein condensate

² Glauber

³ Spin coherent states

⁴ Qutrit

⁵ Discord

⁶ Bell's inequality



پروتکل‌های^۱ مهم از جمله "در میان گذاری زار"^۲ سامانه‌های سهمده مورد نیاز هستند [۲۱]. بنابراین بررسی ویژگی‌های درهم‌تنیدگی سامانه‌های سهمده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

به عنوان یک پژوهش مهم، درهم‌تنیدگی حالت سهمده اسپینی ساخته شده با برهم نهی حالت‌های همدوس $SU(2)$ با استفاده از آنتروپی خطی، که یک سنجه برای تعیین کمی درهم‌تنیدگی حالت است، مورد بررسی قرار گرفت و یک عبارت صریح برای کمی‌سازی درهم‌تنیدگی این حالت استخراج و شرط لازم و کافی برای بیشینه درهم‌تنیدگی این حالت ارائه شد [۱۱]. مطابق محاسبات صورت گرفته مقدار درهم‌تنیدگی تابعی از دامنه حالت‌های همدوس و مقدار اسپین آن‌ها است. نتایج محاسبات نشان دادند که درهم‌تنیدگی این حالت‌ها با افزایش مقدار اسپین افزایش می‌یابد.

در این مقاله نیز یک برهم‌نهی سهمده از حالت‌های همدوس اسپینی در نظر گرفته می‌شود. سپس با کدگذاری مناسب پایه‌های استاندارد محاسباتی بر اساس حالت‌های همدوس حالت مورد نظر به یک حالت سه کیوبیت کاهش داده می‌شود. سپس، برای اولین بار، درهم‌تنیدگی این حالت با استفاده از نامساوی مرمین-کلاشکو^۳ بررسی شده و یک رابطه تحلیلی برای تعیین محدوده درهم‌تنیدگی به دست آورده می‌شود. هم‌چنین وابستگی درهم‌تنیدگی به کمیت‌های مهم مانند پارامتر همدوسی و اسپین حالت‌های همدوس بررسی می‌شود. در پایان نشان داده می‌شود که با کنترل مقدار این پارامترها میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های همدوس اسپینی قابل کنترل است. قابل ذکر است که نامساوی مرمین-کلاشکو تعمیم نامساوی قابل آزمایش بل برای حالت‌های چندمده است و بنابراین نسبت به آنتروپی خطی مورد استفاده در مرجع [۱۱] از اهمیت بسیار بیشتری برخوردار است.

۲. مبانی نظری

۲-۱ حالت‌های همدوس اسپینی و ویژگی‌های آن‌ها

در یک سامانه با اندازه حرکت زاویه‌ای J می‌توان جبر اسپینی را در نظر گرفت. عملگرهای بالابرنده و پایین برنده با J_+ و J_- و عملگر مولفه Z آن با J_z نمایش داده می‌شوند. روابط جابه‌جایی زیر نیز بین آن‌ها برقرار است [۲۲].

$$[J_+, J_-] = 2J_z, \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (1)$$

که به جبر $SU(2)$ معروف است. سامانه در این حالت یک فضای هیلبرت با $2J+1$ بعد را تشکیل می‌دهد.

حالت همدوس با استفاده از این جبر و معرفی عملگر چرخش به صورت

¹ Protocol

² Quantum secret sharing

³ Mermin-klyshko inequality



$$R(\theta, \varphi) = \exp\left[\frac{\theta}{2}(J_+ e^{-i\varphi} - J_- e^{+i\varphi})\right], \quad (2)$$

تولید می‌شود که θ و φ زوایه‌های کروی برای این عملگر هستند. حالت همدوس با عمل عملگر $R(\theta, \varphi)$ روی حالت پایه اسپینی $|j, -j\rangle$ به دست می‌آید.

$$|\theta, \varphi, j\rangle = \exp\left[\frac{\theta}{2}(J_+ e^{-i\varphi} - J_- e^{+i\varphi})\right] |j, -j\rangle \quad (3)$$

اگر پارامتر همدوسی را به صورت $\gamma = e^{-i\varphi} \tan(\theta/2)$ تعریف شود، در این صورت می‌توان نشان داد که:

$$|\theta, \varphi, j\rangle = |\gamma, j\rangle$$

$$|\gamma, j\rangle = \frac{1}{(1+|\gamma|^2)^j} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{j+m} \gamma^{j+m} |j, m\rangle. \quad (4)$$

ضرب داخلی دو حالت همدوس متفاوت را نیز می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\gamma = e^{-i\varphi_1} \tan(\theta_1/2), \quad \delta = e^{-i\varphi_2} \tan(\theta_2/2)$$

$$\langle \theta_1, \varphi_1, j | \theta_2, \varphi_2, j \rangle = p = \frac{(1+\delta^* \gamma)^{2j}}{(1+|\gamma|^2)^j (1+|\delta|^2)^j} \quad (5)$$

سامانه اسپینی را می‌توان با یک سامانه نوسانگر هماهنگ دومی با عملگرهای \hat{a} و \hat{b} نیز تولید کرد [۲۳]. در این صورت جبر $SU(2)$ با تعریف شوینگر^۱ به صورت زیر بیان می‌شود [۲۳].

$$J_+ = a^+ b, \quad J_- = b^+ a, \quad J_z = \frac{1}{2}(a^+ a - b^+ b) \quad (6)$$

اگر تعداد کل فوتون‌های سامانه N باشد (تعداد فوتون‌های زیر سامانه‌های a و b به ترتیب N_a و N_b هستند)، داریم:

¹ Schwinger



$$j = N/2, \quad N = N_a + N_b, \quad m = (N_a - N_b)/2, \quad |N_a\rangle|N_b\rangle = |j, m\rangle \quad (7)$$

$$J_{\pm}|j, m\rangle = \sqrt{(j \pm m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle, \quad J_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle.$$

در حالت اسپین $1/2$ ($j=1/2$) عملگرهای اسپینی به عملگرهای پائولی^۱ $\{\sigma_{\pm}, \sigma_z\}$ کاهش می‌یابند. در این مورد حالت همدوس مربوطه به صورت زیر داده می‌شود.

$$|\theta, \varphi, 1/2\rangle = \exp\left[\frac{\theta}{2}(\sigma_+ e^{-i\varphi} - \sigma_- e^{+i\varphi})\right]|1/2, -1/2\rangle \quad (8)$$

با اثر عملگر و کمی ساده سازی داریم:

$$|\theta, \varphi, 1/2\rangle = \cos(\theta/2)|1/2, -1/2\rangle + e^{-i\varphi} \sin(\theta/2)|1/2, -1/2\rangle \quad (9)$$

که یک کیوبیت روی کرهٔ بلاخ^۲ را نشان می‌دهد. چرا که یک کیوبیت را می‌توان به صورت $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ نوشت که $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. حال اگر کدگذاری را به صورتی انجام دهیم که $|0\rangle = |1/2, -1.2\rangle$ و $|1\rangle = |1/2, 1.2\rangle$ باشند، حالت همدوس به شکل زیر به دست خواهد آمد:

$$|\theta, \varphi, 1/2\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{-i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle \quad (10)$$

با فرض $\alpha = \cos(\theta/2)$ و $\beta = e^{-i\varphi} \sin(\theta/2)$ یک کیوبیت به دست خواهد آمد.

۲-۲ درهم‌تیدگی برهم‌نهی دو حالت همدوس اسپینی ۳ مده

هدف این پژوهش بررسی درهم‌تیدگی برهم‌نهی حالت‌های همدوس ۳ مده است. این حالت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$|\Psi\rangle = \mu|\gamma_1\rangle|\gamma_2\rangle|\gamma_3\rangle + \nu|\delta_1\rangle|\delta_2\rangle|\delta_3\rangle \quad (11)$$

که μ و ν دو پارامتر متغیر هستند. در رابطهٔ بالا $|\gamma_i\rangle$ و $|\delta_i\rangle$ حالت‌های همدوس اسپینی هستند. توجه کنید که این حالت لزوماً بهنجار نیست. برای بررسی درهم‌تیدگی این حالت باید با تعریف مناسب پایه‌های محاسباتی آن را به یک حالت ۳ کیوبیت نگاشت کرد. بنابراین، $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را به صورت زیر کدگذاری می‌کنیم.

¹ Pauli

² Bloch sphere

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &\equiv |\gamma_1\rangle & |1\rangle &\equiv \frac{|\delta_1\rangle - p_1|\gamma_1\rangle}{N_1} \\
 |0\rangle &\equiv |\gamma_2\rangle & |1\rangle &\equiv \frac{|\delta_2\rangle - p_2|\gamma_2\rangle}{N_2} \\
 |0\rangle &\equiv |\delta_3\rangle & |1\rangle &\equiv \frac{|\gamma_3\rangle - p_3|\delta_3\rangle}{N_3}
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که پارامترهای $p_{1,2,3}$ و $N_{1,2,3}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned}
 p_i &= \langle \gamma_i | \delta_i \rangle & N_i &= \sqrt{1 - |p_i|^2} \quad i=1,2 \\
 p_3 &= \langle \delta_3 | \gamma_3 \rangle & N_3 &= \sqrt{1 - |p_3|^2}.
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

با استفاده از تعریف‌های صورت گرفته حالت مورد بررسی را به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle &= (\mu p_3 + \nu p_1 p_2) |000\rangle + \mu N_3 |001\rangle \\
 &+ \nu N_1 N_2 |110\rangle + \nu N_1 p_2 |100\rangle + \nu N_2 p_1 |010\rangle
 \end{aligned} \tag{۱۴}$$

این حالت، یک حالت سه کیوبیت می‌باشد که می‌تواند بسته به مقدار ضرایب درهم تنیده باشد یا نباشد.

از بهنجارش حالت $|\Psi\rangle$ نیز می‌توان N را به صورت زیر دست آورد.

$$N = \left[|\mu|^2 + |\nu|^2 + \mu^* \nu p_1 p_2 p_3 + \mu \nu^* p_1^* p_2^* p_3^* \right]^{-1/2} \tag{۱۵}$$

برای بررسی درهم تنیدگی این حالت از نامساوی مرمین-کلاشکو، که تعمیمی از نامساوی بل برای حالت چند ذره‌ای است، استفاده می‌کنیم [۲۴، ۲۵]. بیان این نکته مهم است که می‌توان از معیارهای دیگری مانند فیدلیتی آماده سازی حالت^۱ هم استفاده کنیم ولی پیاده‌سازی نامساوی مرمین-کلاشکو برای حالت‌های چندمده بسیار آسان‌تر است [۲۶]. طبق تعریف، نامساوی مرمین-کلاشکو برای یک حالت N مده به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۵]:

$$\left| \langle B_N \rangle \right| \leq 2 \tag{۱۶}$$

که B_N یک عملگر بل N مده است.

¹ State preparation fidelity



$$B_N = \frac{1}{2}(A_N + A'_N) \otimes B_{N-1} + \frac{1}{2}(A_N - A'_N) \otimes B'_{N-1} \quad (17)$$

$$B'_N = \frac{1}{2}(A_N + A'_N) \otimes B'_{N-1} - \frac{1}{2}(A_N - A'_N) \otimes B_{N-1}$$

که A_N و A'_N ها مشاهده پذیرهای دو بخشی هستند. کمیت B را می‌توان به صورتی تعریف کرد که:

$$B(\rho) = \frac{\left| \langle B_n \rangle \right| - 2^{N/2}}{2^{\frac{N+1}{2}} - 2^{\frac{N}{2}}}. \quad (18)$$

حالت ρ ، N ذره‌ای، در صورتی درهم‌تیده است که $B(\rho) > 0$ باشد. بیشینه درهم‌تیدگی ایجاب می‌کند که $B(\rho) = 1$ باشد [۲۶].

برای حالتی با $N = 3$ ، عملگر بل B_3 به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷].

$$B_3 = 4 \left[e^{-i\beta_3} \sigma_+ \otimes \sigma_+ \otimes \sigma_- + e^{i\beta_3} \sigma_- \otimes \sigma_- \otimes \sigma_+ \right] \quad (19)$$

که $\beta_3 = \frac{\pi}{4}(N-1)$ است. با اعمال این عملگر روی حالت $|\Psi\rangle$ داریم:

$$B_3 |\Psi\rangle = \frac{4}{N} \left[e^{-i\beta_3} \mu N_3 |110\rangle + e^{i\beta_3} \nu N_1 N_2 |100\rangle \right] \quad (20)$$

با استفاده از رابطه بالا $\langle B_3 \rangle$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | B_3 | \Psi \rangle &= \frac{4}{N^2} \left[e^{-i\beta_3} \mu \nu^* N_1 N_2 N_3 + e^{i\beta_3} \nu \mu^* N_1 N_2 N_3 \right] \\ &= \frac{4}{N^2} \left[e^{-i\beta_3} \mu \nu^* + e^{i\beta_3} \nu \mu^* \right] N_1 N_2 N_3. \end{aligned} \quad (21)$$

از رابطه (۱۸) و شرط درهم‌تیدگی، $B(\rho) > 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} B(\rho) > 0 &\Rightarrow \left| \langle B_3 \rangle \right| > 2^{3/2} \\ &\Rightarrow \left[e^{-i\beta_3} \mu \nu^* + e^{i\beta_3} \nu \mu^* \right] \frac{N_1 N_2 N_3}{N^2} > 1/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (22)$$

با فرض $\mu=1$ و $v=e^{-i\theta}$ ، شرط درهم تنیدگی برای حالت تعریف شده در رابطه (۱۴) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\cos(\beta_3 - \theta)}{1 + p_1 p_2 p_3 \cos(\theta)} N_1 N_2 N_3 > 1/\sqrt{2} \quad (23)$$

شرط بیشینه درهم تنیدگی را هم می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$B(\rho) = 1 \Rightarrow \langle B_3 \rangle = 4 \quad (24)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\beta_3 - \theta)}{1 + p_1 p_2 p_3 \cos(\theta)} N_1 N_2 N_3 = 1$$

این شرط ایجاب می کند که $\beta_3 = \theta$ و $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\gamma_i \delta_i^* = -1 \quad i=1,2,3 \quad (25)$$

تحت این شرایط حالت مورد نظر به صورت زیر در خواهد آمد:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\gamma, \gamma, \gamma\rangle + e^{-i\varphi} \left| \frac{-1}{\delta^*}, \frac{-1}{\delta^*}, \frac{-1}{\delta^*} \right\rangle \right) \quad (26)$$

با استفاده از رابطه (۵) برای ضرب داخلی، به راحتی می توان نشان داد که این حالتها بر هم عمود هستند. اگر کدهای محاسباتی طوری باشد که $|\gamma\rangle \equiv |0\rangle$ در این صورت $|(\delta^*)^{-1}\rangle \equiv |1\rangle$ خواهد بود و حالت مشهور GHZ^۱، که دارای بیشینه درهم تنیدگی است، تولید خواهد شد. لازم به یادآوری است که این حالت برای آزمایشهای بنیادی مکانیک کوانتومی دارای اهمیت ویژه ای است.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0,0,0\rangle + e^{-i\varphi} |1,1,1\rangle) \quad (27)$$

۳. بحث و بررسی

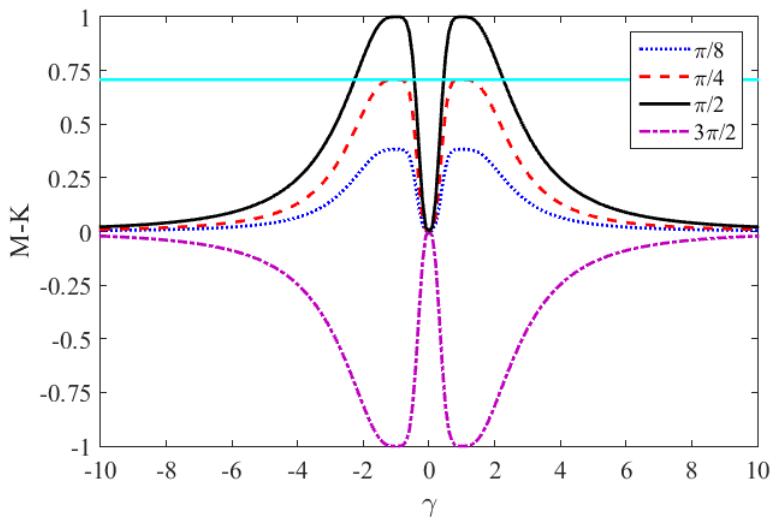
در این بخش نتایج حاصل از محاسبات مربوط به نامساوی مرمین-کلاشکو، رابطه (۲۳)، به ازای مقادیر مختلف پارامترهای درگیر را ارائه می دهیم. از نرم افزار MATLAB برای محاسبه این نامساوی استفاده می کنیم. پارامترهایی مانند j, θ, γ و δ موضوع بررسی خواهند بود. محدوده مناسب پارامترها برای

¹ Greenberger–Horne–Zeilinger



درهم‌تندگی حالت همدوس اسپینی ۳ مده را مشخص می‌کنیم. برای انسجام کار، بررسی خود را به چند حالت خاص محدود و محدوده مناسب پارامترها برای آشکارسازی درهم‌تندگی را مشخص می‌کنیم.

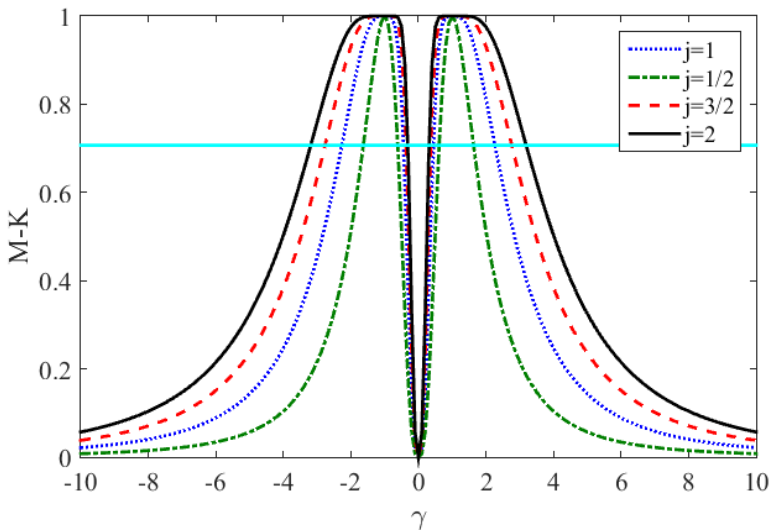
در حالت اول $\delta = -\gamma$ را انتخاب و اثر z و γ را بررسی می‌کنیم. در شکل ۱، مقدار طرف چپ نامساوی مرین-کلاشکو (رابطه ۲۳) به ازای $z=1$ و چند مقدار مختلف θ رسم شده است. خط $1/\sqrt{2}$ نیز در شکل رسم شده است تا محدوده آشکارسازی درهم‌تندگی حالت برای هر مقدار θ توسط این نامساوی مشخص شود. اگر مقدار طرف چپ نامساوی بیشتر از $1/\sqrt{2}$ باشد به معنی آشکارسازی درهم‌تندگی است. در محاسبات مربوطه مقدار $\beta_3 = \pi/2$ استفاده شده است. مشخص است که تحت این شرایط فقط وقتی $\beta_3 \approx \theta \approx \pi/2$ است، درهم‌تندگی قابل آشکارسازی است. اگر مقدار θ از $\pi/2$ فاصله بگیرد طرف چپ نامساوی نیز خیلی سریع کاهش می‌یابد و درهم‌تندگی با استفاده از این نامساوی قابل آشکار سازی نمی‌باشد. تأکید می‌کنیم که این بدان معنی نیست که درهم‌تندگی وجود ندارد بلکه درهم‌تندگی قابل آشکار کردن نمی‌باشد. به این دلیل که میزان درهم‌تندگی کوچک است. برای مثال در حالت $\theta = \pi/4$ به ازای هیچ مقداری از γ درهم‌تندگی قابل آشکار کردن نیست.



شکل ۱ مقدار نامساوی مرین-کلاشکو به ازای چند مقدار θ مختلف و $z=1$.

در مرحله بعد اثر z را روی نتایج بررسی شد. در شکل ۲، مقدار نامساوی مرین-کلاشکو را به ازای $\beta_3 = \theta = \pi/2$ و چهار مقدار z متفاوت رسم شده است. از نمودار مشخص است که هر چه مقدار z بیشتر شود، نمودار پهن تر شده و محدوده مجاز γ برای ایجاد درهم‌تندگی بیشتر می‌شود. در واقع با افزایش

اسپین، آشکارسازی درهم‌تنیدگی نیز ساده‌تر می‌شود. به بیانی دیگر، با افزایش اسپین، درهم‌تنیدگی نیز افزایش پیدا می‌کند. مقدار بیشینه رابطهٔ مرمین-کلاشکو به ازای γ برابر یک اتفاق می‌افتد که در این صورت حالت مورد نظر بیشینه درهم‌تنیده می‌شود. اگر پارامتر همدوسی نزدیک به صفر باشد درهم‌تنیدگی قابل آشکارسازی نیست. برای مواردی که پارامتر همدوسی خیلی بزرگ باشد درهم‌تنیدگی کوچک‌تر شده و قابل آشکارسازی نیست. در واقع یک محدوده برای پارامتر همدوسی داریم که می‌توان در آن محدوده درهم‌تنیدگی را با این نامساوی آشکارسازی کرد. مشاهده می‌شود که روند و الگوی تغییرات با نتایج ارائه شده در مرجع [۶] تطابق خوبی دارند. در این کار نشان داده شده است که میزان درهم‌تنیدگی برای برهم‌نهی دومه حالت‌های همدوس با اسپین رابطهٔ مستقیم دارد. برای حالت مورد بررسی نیز با افزایش مقدار اسپین میزان درهم‌تنیدگی افزایش قابل ملاحظه‌ای دارد [۶]. افزایش درهم‌تنیدگی با افزایش اسپین برای سامانه‌های سه‌مده در مرجع [۱۱] نیز گزارش شده است.



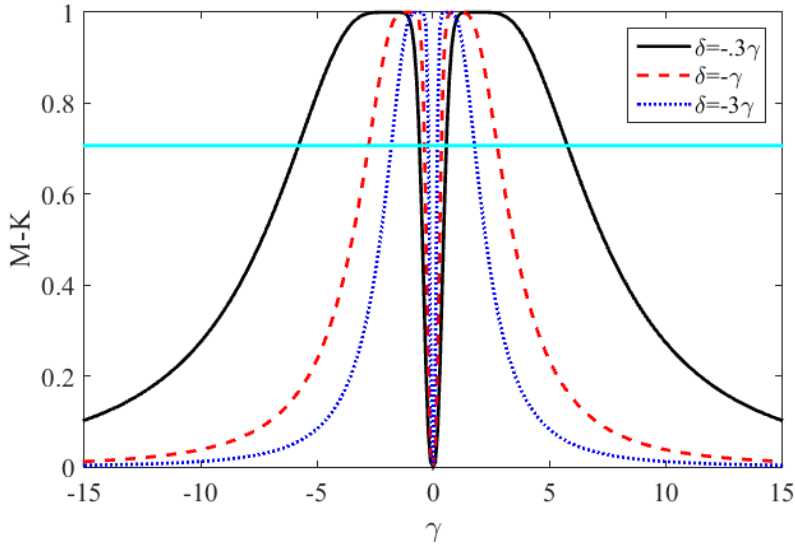
شکل ۲ مقدار نامساوی مرمین-کلاشکو به ازای چند مقدار j مختلف و $\beta_3 = \theta = \pi/2$

در ادامه نامساوی را برای مقادیر مختلف پارامترهای همدوسی γ و δ بررسی کردیم. خلاصه این نتایج را در شکل ۳ نشان داده شده است.

مشخص است که برای حالت $\delta = -0.3\gamma$ ، طبق نامساوی مرمین-کلاشکو در محدودهٔ گسترده‌تری از پارامتر همدوسی درهم‌تنیدگی داریم. این محاسبات نشان می‌دهند که حساسیت به این پارامتر بسیار بیشتر از سایر پارامترهای درگیر در مسئله است. همانند حالت‌های همدوس گلابر با افزایش پارامتر همدوسی



درهم تنیدگی افزایش پیدا می‌کند. با این حال در مقادیر بیشتر پارامتر همدوسی بر خلاف حالت‌های گلابر، همدوسی کاهش پیدا می‌کند [۱۷].



شکل ۳ محدوده آشکارسازی درهم‌تنیدگی با نامساوی مرین-کلاشکو به ازای $\theta = \beta_3 = \pi/2$, $j = 3/2$ و چند مقدار مختلف پارامترهای همدوسی.

۴. نتیجه‌گیری

حالت‌های همدوس چندمده دارای اهمیت زیادی در مکانیک کوانتومی هستند. برهم‌نهی همدوس دومه این حالت‌ها و کاربردهایشان در فناوری‌های کوانتومی در مقالات زیادی بررسی شده است. در این پژوهش، برای اولین بار، شرایط درهم‌تنیدگی یک برهم‌نهی سه‌مده حالت‌های همدوس اسپینی را با استفاده از نامساوی مرین-کلاشکو، که تعمیمی از نامساوی بل برای حالت چندمده است، بررسی شد.

در این کار نشان داده شد که اگر حالت همدوس به صورت $|\Psi\rangle = \mu|\gamma_1\rangle|\gamma_2\rangle|\gamma_3\rangle + \nu|\delta_1\rangle|\delta_2\rangle|\delta_3\rangle$ باشد، می‌توان با معرفی مناسب کدهای پایه محاسباتی و فرض $\mu = 1$ و $\nu = e^{-i\theta}$ یک نامساوی برای بررسی درهم‌تنیدگی این حالت استخراج کرد. نتایج محاسبات نشان می‌دهند که در این شرایط، محدوده پارامتر همدوسی γ که درهم‌تنیدگی را تعیین می‌کند به مقدار پارامترهای θ , j و پارامتر همدوسی δ وابسته است. به ازای $\theta = \pi/2$ بیشینه درهم‌تنیدگی را داریم. با افزایش مقدار اسپین j منحنی پهن شده و محدوده مجاز پارامتر همدوسی γ برای درهم‌تنیدگی

افزایش می‌یابد. وقتی علامت دو پارامتر همدوسی γ و δ مخالف است، هر چه δ کوچک‌تر باشد، منحني پهن‌تر شده و محدوده درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد. این نتایج با داده‌های گزارش شده در زمینه مطالعه میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های برهم‌نهی ۲ مده با استفاده از سایر سنج‌ها و معیارهای درهم‌تنیدگی تطابق دارند.

منابع

- [1] Kurzyk D., *Introduction to Quantum Entanglement*, Vol. 24 (2012).
- [2] Duarte F. J., *Fundamentals of Quantum Entanglement* (IOP Publishing Bristol, 2019).
- [3] Schrödinger E., *Die Gegenwärtige Situation in Der Quantenmechanik*, *Naturwissenschaften* **23**, 823 (1935).
- [4] Formaggio J. A., Kaiser D. I., Murskyj M. M., and Weiss T. E., *Violation of the Leggett-Garg Inequality in Neutrino Oscillations*, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 50402 (2016).
- [5] Hensen B., Bernien H., Dréau A. E., Reiserer A., Kalb N., Blok M. S., Ruitenberg J., Vermeulen R. F. L., Schouten R. N., Abellán C., Amaya W., Pruneri V., Mitchell M. W., Markham M., Twitchen D. J., Elkouss D., Wehner S., Taminiau T. H., and Hanson R., *Nature* **526**, 682 (2015).
- [6] Maleki Y. and Ahansaz B., *Quantum Correlations in Qutrit-like Superposition of Spin Coherent States*, *Laser Phys. Lett.* **16**, 75205 (2019).
- [7] Wang X. and Sanders B. C., *Phys. Rev. A* **65**, 12303 (2001).
- [8] K. Berrada, S. A. Khalek, and C. H. R. Ooi, *Quantum Metrology with Entangled Spin-Coherent States of Two Modes*, *Phys. Rev. A* **86**, 33823 (2012).
- [9] Maleki Y. and Maleki A., *Entangled Multimode Spin Coherent States of Trapped Ions*, *J. Opt. Soc. Am. B* **35**, 1211 (2018).
- [10] Chryssomalakos C., Guzmán-González E., and Serrano-Ensástiga E., *Geometry of Spin Coherent States*, *J. Phys. A Math. Theor.* **51**, 165202 (2018).
- [11] Maleki Y., Khashami F., and Mousavi Y., *Entanglement of Three-Spin States in the Context of SU(2) Coherent States*, *Int. J. Theor. Phys.* **54**, 210 (2015).
- [12] Fu H., Wang X., and Solomon A. I., *Maximal Entanglement of Nonorthogonal States: Classification*, *Phys. Lett. A* **291**, 73 (2001).
- [13] Maleki Y., *Entanglement and Decoherence in Two-Dimensional Coherent State Superpositions*, *Int. J. Theor. Phys.* **56**, 757 (2017).
- [14] Mansour M., Dahbi Z., Essakhi M., and Salah A., *Quantum Correlations Through Spin Coherent States*, *Int. J. Theor. Phys.* **60**, 2156 (2021).
- [15] Wang X., Sanders B. C., and Pan S., *Entangled Coherent States for Systems With SU(2) And SU(1,1) Symmetries*, *J. Phys. A Math. Gen.* **33**, 7451 (2000).
- [16] Mansour M. and Dahbi Z., *Entanglement of Bipartite Partly Non-Orthogonal 1/2-Spin Coherent States*, *Laser Phys.* **30**, 85201 (2020).
- [17] Maleki Y., *Generation and Entanglement of Multi-Dimensional Multi-Mode Coherent Fields in Cavity QED*, *Quantum Inf. Process.* **15**, 4537 (2016).
- [18] Maleki Y. and Zheltikov A. M., *Linear Entropy of Multiqudit Nonorthogonal States*, *Opt. Express* **27**, 8291 (2019).
- [19] Walther P., Aspelmeyer M., Resch K. J., and Zeilinger A., *Experimental Violation of a Cluster State Bell Inequality*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 20403 (2005).
- [20] Larsson J., *Loopholes in Bell Inequality Tests of Local Realism*, *J. Phys. A Math. Theor.* **47**, 424003 (2014).
- [21] Gottesman D., *Theory of Quantum Secret Sharing*, *Phys. Rev. A* **61**, 42311 (2000).
- [22] Gazeau J.-P., *Coherent States in Quantum Physics* (Wiley, 2009).



- [23] Radcliffe J. M., *Some Properties of Coherent Spin States*, J. Phys. A Gen. Phys. **4**, 313 (1971).
- [24] Klyshko D. N., *The Bell and GHZ Theorems: A Possible Three-Photon Interference Experiment and the Question of Nonlocality*, Phys. Lett. A **172**, 399 (1993).
- [25] Mermin N. D., *Extreme Quantum Entanglement in a Superposition of Macroscopically Distinct States*, Phys. Rev. Lett. **65**, 1838 (1990).
- [26] Seevinck M. and Uffink J., *Sufficient Conditions for Three-Particle Entanglement and Their Tests in Recent Experiments*, Phys. Rev. A **65**, 12107 (2001).
- [27] Dür W., *Multipartite Bound Entangled States That Violate Bell's Inequality*, Phys. Rev. Lett. **87**, 230402 (2001).

© 2020 Alzahra University, Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).