

Research Paper

Investigation of the Relationship of the Degree of Mixedness and Entanglement of the Bipartite Spin Coherent States ¹

Mehrzaad Ashrafpour^{*2} and Zahra Saghi³

Received: 2021.04.07

Revised: 2021.11.24

Accepted: 2021.12.25

Abstract

In this work, superposition of spin coherent states composed of two qubits is formed and by calculating the geometric measure of mixing of the system introduced in this work, the degree of mixedness of the studied state is investigated. In the following, the changes in the entanglement of the introduced state are studied by using the negativity measure. Finally, by drawing the appropriate plots, according to the influential parameters in this system, we examine the maximum and the minimum of the changes in the mixedness and entanglement and also their relationship to the mixed system consisting of two-qubit spin coherent states. It was observed that for maximizing α , when the changes of parameters indicate the purity of the state, the entanglement of the system reaches its maximum value for two-qubit systems. Also, for all values of coherence parameter, the entanglement decreases when mixedness of the system increases.

Keywords: *Mixedness, Entanglement, Spin Coherent State, Qubit, Mixed State.*

¹ DOI: 10.22051/ijap.2021.35652.1202

² Assistant Professor, Department of Physics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. (Corresponding Author). Email: mehrzadasrafpour@yahoo.com

³ M. Sc. Graduated, Department of Physics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: Zahra.saghi74@gmail.com



بررسی ارتباط میزان آمیختگی و درهم‌تنیدگی حالت‌های

همدوس اسپینی دو جزئی^۱

مهرداد اشرف‌پور*^۲ و زهرا ساقی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۹/۰۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۰۴

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک شیمی، دانشگاه الزهرا

سال یازدهم، پیاپی ۲۷، زمستان ۱۴۰۰

صص ۷-۱۵

چکیده:

در این کار، برهم‌نهی‌ای از حالت‌های همدوس اسپینی دو کیوبیتی تشکیل و با محاسبه تحلیلی سنجه هندسی اختلاط برای حالت معرفی شده، میزان آمیختگی حالت مورد نظر بررسی می‌شود. در ادامه، تغییرات درهم‌تنیدگی حالت نامبرده با بکارگیری سنجه منفیت مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در نهایت، نیز با رسم نمودارهای مناسب بر حسب پارامترهای تأثیرگذار در این سامانه، بیشینه و کمینه تغییرات آمیختگی و درهم‌تنیدگی و نیز ارتباط آن‌ها برای سامانه آمیخته تشکیل شده از حالت‌های همدوس اسپینی دو کیوبیتی های بیشینه‌کننده هنگامی که تغییر پارامترها بر خالص بودن مطالعه می‌گردد. ملاحظه گردید که به ازاء حالت دلالت داشته باشد، درهم‌تنیدگی سامانه به بیشینه مقدار خود برای سامانه‌های دو کیوبیتی می‌رسد. هم‌چنین به ازاء تمامی مقادیر پارامتر همدوسی، با افزایش آمیختگی سامانه، درهم‌تنیدگی آن کاهش می‌یابد. **واژگان کلیدی:** آمیختگی، درهم‌تنیدگی، حالت همدوس اسپینی، کیوبیت، حالت آمیخته.

^۱ DOI: 10.22051/ijap.2021.35652.1202

^۲ استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. (نویسنده مسئول). Email: mehrzadasrafpour@yahoo.com

^۳ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. Email: Zahra.saghi74@gmail.com

۱. مقدمه

از دیدگاه نظریه اطلاعات کوانتومی تعیین میزان درهم‌تنیدگی و میزان اختلاط حالت‌های کوانتومی، از جمله ویژگی‌های اساسی حالت‌های کوانتومی است [۱]. درهم‌تنیدگی کوانتومی در نظریه اطلاعات کوانتومی و ارتباطات و محاسبات کوانتومی نقش اساسی ایفا می‌کند [۴-۲]. برای آن که از مقدار درهم‌تنیدگی موجود در حالت‌های کوانتومی مطلع شویم، به سنج‌های درهم‌تنیدگی نیازمندیم که به ما در کمی کردن میزان درهم‌تنیدگی در سامانه کوانتومی کمک می‌کند. سنجه منفیت، در بررسی درهم‌تنیدگی سامانه‌های تشکیل شده از کاواک‌هایی که با منبع مستقل اندرکنش می‌کنند [۵]، در محاسبه درهم‌تنیدگی حالت پایه یک‌بعدی نظریه میدان کوانتومی و در نظریه میدان هولوگرافی [۸-۶]، در یافتن میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی بیش از دو جزء [۱۱-۹]، در محاسبه درهم‌تنیدگی سامانه‌های بس‌ذره‌ای و درک ساختار آن‌ها [۱۲] و شبیه‌سازی مونت-کارلو [۱۳] استفاده می‌شود. بنابراین سنجه منفیت یکی از بهترین و مناسب‌ترین انتخاب‌ها برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی می‌باشد.

حالت‌های خالص به خودی خود برای بیان وضعیت‌های واقعی سامانه کوانتومی کافی نیستند و در این مواقع از حالت‌های آمیخته استفاده می‌شود [۱۴]. از جمله کاربردهای حالت‌های آمیخته می‌توان به استفاده از آمیختگی حداکثری گروهی از حالت‌های کوانتومی اشاره کرد که تبدیل حالت‌های کوانتومی در حضور نوفه به یکدیگر را تبدیلی برگشت‌پذیر می‌سازند [۱۵]. همچنین، در مطالعه پدیده واهمدوسی حالت‌های کوانتومی، تعیین میزان آمیختگی سامانه ضروری است [۱۶]. در بررسی ویژگی‌های عدم قطعیت در مدل هایزنبرگ، میزان آمیختگی سامانه‌های کوانتومی مورد مطالعه، تأثیرگذار است [۱۷]. در موضوع ترابرد کوانتومی حالت‌های آمیخته، موفقیت در انتقال حالت‌ها با میزان آمیختگی آن‌ها ارتباط مستقیم دارد [۱۸]. از این رو، همواره به محاسبه کمی میزان آمیختگی حالت‌های کوانتومی نیازمندیم. میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته وابسته به نوع آنسامبل‌هایی از حالت‌های خالص است که آن را می‌سازند [۱۹]. بنابراین، لازمه بررسی دقیق درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی آمیخته، مطالعه میزان آمیختگی آن حالت‌ها و نیز یافتن ارتباط میان آمیختگی و درهم‌تنیدگی سامانه‌های کوانتومی است. سنجه هندسی اختلاط حالت کوانتومی یکی از مناسب‌ترین انتخاب‌ها برای اندازه‌گیری درجه اختلاط حالت کوانتومی است که با توجه به هندسی بودن اساس تعریف آن، ساده و قابل درک می‌باشد [۲۰]. از این رو از سنج‌های هندسی اختلاط برای اندازه‌گیری میزان آمیختگی حالت‌ها استفاده می‌کنیم. حالت‌های هم‌دوس اسپینی از اهمیت بالایی در نظریه اطلاعات کوانتومی برخوردارند [۲۳-۲۱]. این حالت‌های کوانتومی به دلیل داشتن کمینه عدم



قطعیتهای هاینبرگ، شبیه‌ترین حالت‌ها به دنیای کلاسیکی هستند [۲۴]. بنابراین بررسی ارتباط میان میزان درهم‌تنیدگی و آمیختگی این حالت‌ها دارای اهمیت است.

۲. توصیف مدل

حالت همدوس اسپینی در شکل کلی آن مطابق زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$|\alpha_i, j\rangle = \frac{1}{(1+|\alpha_i|^2)^j} \sum_{m=-j}^j \binom{2j}{m+j}^{\frac{1}{2}} \alpha_i^{j+m} |j, m\rangle \quad (1)$$

که در آن، α_i پارامتر همدوسی و $|j, m\rangle$ ها ویژه‌حالت‌های همزمان عملگرهای J^2 و J_z با ویژه‌مقادیر به ترتیب، $j(j+1)\hbar^2$ و $m\hbar$ است. با در نظر گرفتن اسپین الکترون و در نتیجه آن

$$j = \frac{1}{2} \text{ و همچنین } \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1\rangle \text{ و } \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |0\rangle$$

$$\left| \alpha_i, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\alpha_i|^2}} (|0\rangle + \alpha_i |1\rangle) = |\alpha_i\rangle \quad (2)$$

سامانه آمیخته دو کیوبیتی‌ای را در نظر می‌گیریم که از حالت‌هایی به صورت زیر تشکیل شده است:

$$\rho = \frac{1}{2} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2} |\psi_2\rangle\langle\psi_2| \quad (3)$$

که در آن حالت‌های $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ برهم‌نهی‌هایی از حالت‌های همدوس اسپینی معرفی شده در رابطه (۲) است و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_1}} (\cos \theta |\alpha_1 \alpha_1\rangle + \sin \theta |\alpha_2 \alpha_2\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N_2}} (\cos \varphi |\alpha_1 \alpha_1\rangle + \sin \varphi |\alpha_2 \alpha_2\rangle) \end{aligned} \quad (4)$$

هم‌چنین در رابطه‌های بالا N_1 و N_2 ضرایب بهنجارش هستند و برای سامانه‌های کوانتومی آمیخته تشکیل شده از حالت‌های همدوس اسپینی دو کیوبیتی، تغییرات آمیختگی و درهم‌تنیدگی را با توجه به $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha$ و نیز با در نظر گرفتن $\varphi = \frac{\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم. برای تعریف سنججه هندسی درجه اختلاط حالت کوانتومی به فاصله هیلبرت-اشمیت میان دو حالت آمیخته نیاز داریم. مربع فاصله هیلبرت-اشمیت به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵]:

$$d^2(\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2) = Tr(\hat{\rho}_1 - \hat{\rho}_2)^2 \quad (5)$$

که در آن، $\hat{\rho}_1$ و $\hat{\rho}_2$ ماتریس های چگالی حالت های آمیخته اول و دوم است. با استفاده از کمینه مربع فاصله هیلبرت-اشمیت، سنجه هندسی اختلاط حالت های کوانتومی را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$D = \min_{|\psi\rangle} \text{Tr}(\hat{\rho} - \hat{\rho}_{\text{pure}})^2 \quad (6)$$

که $\hat{\rho}$ ماتریس چگالی حالت های آمیخته داده شده است. همچنین داریم:

$$\hat{\rho}_{\text{pure}} = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (7)$$

ماتریس چگالی حالت خالص بیان شده توسط بردار حالت $|\psi\rangle$ است و کمینه سازی نیز روی تمامی حالت های خالص ممکن انجام می گیرد. در نهایت برای سنجه هندسی اختلاط حالت کوانتومی داریم [۲۰]:

$$D = \sum_i \lambda_i^2 + 1 - 2\lambda_{\max} = (1 - \lambda_{\max})^2 + \sum_{\lambda_i < \lambda_{\max}} \lambda_i^2 \quad (8)$$

برای حالت خالص بجز $\lambda_{\max} = 1$ ، سایر ویژه مقادیر صفر هستند. از این رو برای حالت خالص $D = 0$ به دست می آید که مطابق با انتظارمان است. همچنین هنگامی که تمامی ویژه مقادیر ماتریس چگالی یکسان باشند: $\lambda_i = \frac{1}{n}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، که در این رابطه n ابعاد سامانه کوانتومی است، D بیشینه می شود. بنابراین بیشینه مقدار سنجه هندسی اختلاط حالت کوانتومی در این حالت برابر است با:

$$D = 1 - \frac{1}{n} \quad (9)$$

و ماتریس چگالی نیز در این مورد خواهد شد:

$$\hat{\rho}_{\max} = \frac{1}{n} \hat{1} \quad (10)$$

که به حالت با بیشترین آمیختگی بازمی گردد.

با به دست آوردن ویژه مقادیر ماتریس چگالی معرفی شده در رابطه (۳) خواهیم داشت:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2(1 + \alpha^4)((1 + \alpha^2)^2 + (-1 + \alpha^2)^2 \sin 2\theta) + 2\alpha^6} (1 + 2\alpha^2 + 2\alpha^4 + \alpha^8 + (-1 + \alpha^2)^2(1 + \alpha^4) \sin 2\theta + \sqrt{(1 + \alpha^4)^3 (\cos \theta + \sin \theta)^2 ((1 + \alpha^2)^2 + (-1 + \alpha^2)^2 \sin 2\theta)})$$



$$\lambda_1 = \frac{1}{2(1 + \alpha^4)((1 + \alpha^2)^2 + (-1 + \alpha^2)^2 \sin 2\theta) + 2\alpha^6} (1 + 2\alpha^2 + 2\alpha^4 + \alpha^8 + (-1 + \alpha^2)^2(1 + \alpha^4) \sin 2\theta - \sqrt{(1 + \alpha^4)^3 (\cos \theta + \sin \theta)^2 ((1 + \alpha^2)^2 + (-1 + \alpha^2)^2 \sin 2\theta)}) \quad (11)$$

با قرار دادن ویژه‌مقادیر به‌دست آمده از رابطه (۱۱) در رابطه (۸)، می‌توان سنجه هندسی اختلاط بر حسب پارامترهای همدوسی و برهم‌نهی α و θ به‌دست آورد. برای بررسی درهم‌تنیدگی سامانه آمیخته متشکل از حالت‌های همدوس اسپینی دو کیوبیتی معرفی شده در رابطه (۳)، از سنجه منفیت که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم [۶]:

$$N(\rho_{AB}) = \frac{\|\rho_{TA}\| - 1}{2} \quad (12)$$

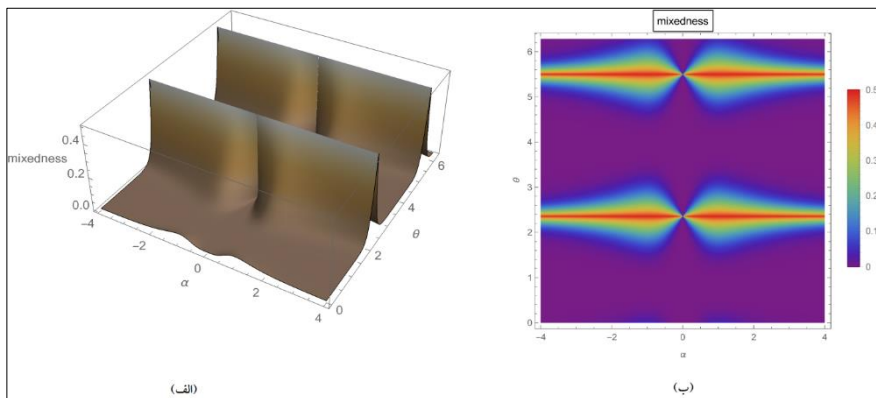
که در این رابطه، ρ_{TA} ، ترانهاده جزئی نسبت به زیرسامانه A است و داریم:

$$\|\rho_{TA}\| = \text{Tr} \sqrt{(\rho_{TA})^\dagger \rho_{TA}}$$

با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توان درهم‌تنیدگی سامانه آمیخته معرفی شده در رابطه (۳) را محاسبه نمود. در ادامه می‌توان چگونگی تغییرات سنجه‌های مورد استفاده بر حسب پارامترهای تاثیرگذار α و θ را بررسی و مقایسه کرد.

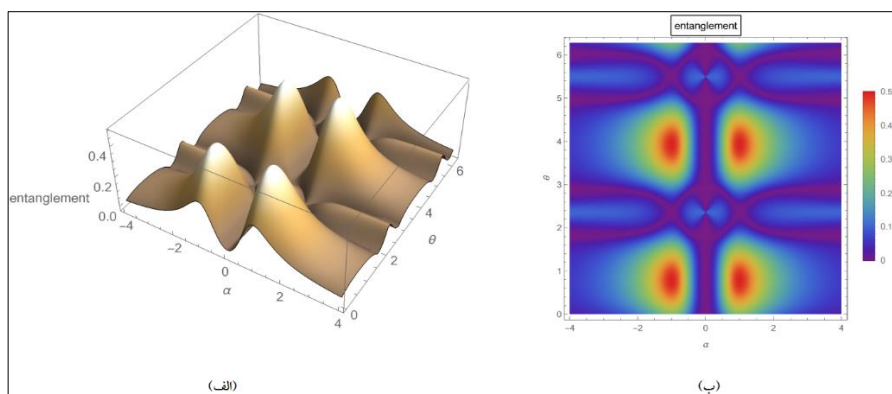
۳. نتایج

با استفاده از نرم‌افزار متمتیکا، نتایج محاسبات و نیز تغییرات پارامترها را مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در شکل (۱) تغییرات آمیختگی سامانه بر حسب پارامترهای α و θ رسم شده است. همانطور که ملاحظه می‌گردد، سنجه هندسی اختلاط حالت کوانتومی به ازاء تمامی مقادیر α و $\theta = n\pi$ بجز در $\alpha = 0$ ، $\frac{\pi}{4}$ است که بیشینه مقداری است که می‌توان برای آمیختگی آنسامبل‌های دو کیوبیتی به‌دست آورد. لازم به یادآوری است که سنجه هندسی اختلاط هنگامیکه $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ باشد، به ازاء تمامی مقادیر α صفر است چرا که در این حالت با ماتریس چگالی حالت خالص رو به رو خواهیم شد.



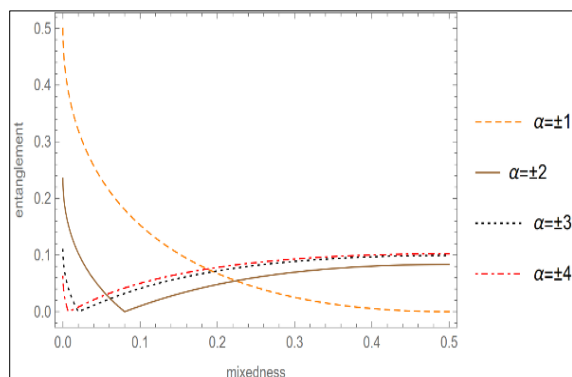
شکل ۱ نمودار الف و ب: تغییرات آمیختگی سامانه دو کیوبیتی تشکیل شده از حالت‌های همدوس اسپینی برحسب α و θ : الف: نمودار و ب: توزیع آمیختگی سامانه.

در شکل (۲) تغییرات درهم‌تنیدگی سامانه آمیخته معرفی شده در رابطه (۳) را با استفاده از رابطه (۱۲)، برحسب پارامترهای α و θ رسم کرده‌ایم. مطابق انتظارمان، درهم‌تنیدگی سامانه به ازاء $\alpha = 0$ و تمامی مقادیر θ و نیز به ازاء $\alpha = \pm 1$ و $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$ از بین می‌رود. هم‌چنین به ازاء $\alpha = \pm 1$ و $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ ، در بیشینه درهم‌تنیدگی خود برای آنسامبل‌های دو کیوبیتی آمیخته قرار دارد.



شکل ۲ تغییرات درهم‌تنیدگی سامانه دو کیوبیتی تشکیل شده از حالت‌های همدوس اسپینی برحسب α و θ : الف: نمودار و ب: توزیع درهم‌تنیدگی سامانه.

هم‌چنین به ازاء مقادیر متفاوت α رابطه میان آمیختگی و درهم‌تنیدگی سامانه دوجزئی معرفی شده در این کار بررسی شده که در شکل (۳) به ازاء α های مختلف تغییرات آن‌ها رسم شده است. همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، به ازاء تمامی مقادیر α با افزایش میزان آمیختگی، درهم‌تنیدگی سامانه کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد و بیشترین میزان درهم‌تنیدگی سامانه در α های متفاوت هنگامی رخ می‌دهد که سامانه بدون آمیختگی باشد. همچنین، این روند کاهشی در α های بزرگتر سریع‌تر رخ می‌دهد به طوری که به ازاء $\alpha = \pm 4$ در این شکل، سریع‌ترین افت درهم‌تنیدگی را شاهد هستیم. هم‌چنین به ازاء $\alpha = \pm 1$ هرچه آمیختگی بیشتر شود، درهم‌تنیدگی حالت کاهش می‌یابد تا جایی که با قرار گرفتن سامانه در حالت خالص، در بیشینه درهم‌تنیدگی برای سامانه‌های دو کیوبیتی یعنی 0.5 قرار می‌گیرد اما هنگامی که سامانه در بیشترین میزان آمیختگی خود قرار بگیرد، درهم‌تنیدگی سامانه از بین می‌رود. در $\alpha = \pm 2, \pm 3, \pm 4$ ، هنگامی که سامانه در حالت خالص قرار داشته باشد، درهم‌تنیدگی آن به ترتیب $0.23, 0.109$ و 0.062 است. هم‌چنین هنگامی که سامانه به بیشینه مقدار آمیختگی خود یعنی 0.5 می‌رسد، در $\alpha = \pm 2$ درهم‌تنیدگی 0.083 ، در $\alpha = \pm 3$ درهم‌تنیدگی 0.099 و در $\alpha = \pm 4$ درهم‌تنیدگی 0.102 خواهد بود. بنابراین با افزایش میزان α هنگامی که سامانه در حالت خالص قرار داشته باشد، به تدریج حد بیشینه درهم‌تنیدگی کاهش و نیز با قرار گرفتن در بیشینه آمیختگی، افزایش می‌یابد.



شکل ۳ نمودار تغییرات درهم‌تنیدگی سامانه دو کیوبیتی تشکیل شده از حالت‌های همدوس اسپینی بر حسب آمیختگی به ازاء مقادیر مختلف پارامتر همدوسی α .

۴. نتیجه گیری

در این کار، با محاسبات تحلیلی و رسم نمودارها چگونگی ارتباط بین آمیختگی و درهم تنیدگی سامانه دوجزئی معرفی شده، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. بر اساس نتایج بدست آمده از محاسبات تحلیلی، به ازاء α های بیشینه کننده ($\alpha = \pm 1$)، با افزایش میزان اختلاط آنسامبل همدوس اسپینی مورد نظر، درهم تنیدگی آن از مقدار بیشینه خود کاهش یافته است. سپس در حوالی بیشینه اختلاط برای سامانه های دوجزئی (یعنی ۰/۵) به کمترین مقدار خود (یعنی صفر) تقلیل می یابد. هم چنین بیشینگی در هر دو مورد آمیختگی و درهم تنیدگی سامانه مورد مطالعه به ازاء α ها و θ های متفاوت اتفاق می افتد، به گونه ای که برای $\alpha = \pm 1$ و $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ بیشینه درهم تنیدگی و به ازاء تمامی مقادیر α به جز صفر و $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$ بیشینه آمیختگی برای سامانه های دوجزئی را خواهیم داشت. مطابق با بررسی های انجام شده و نمودارها به ازاء α های بیشینه کننده یعنی $\alpha = \pm 1$ ، هنگامی که تغییر پارامترها بر خالص بودن حالت دلالت داشته باشد، درهم تنیدگی سامانه به بیشینه مقدار خود برای سامانه های دو کیوبیتی یعنی ۰/۵ می رسد. هم چنین در $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ به ازاء تمامی مقادیر α ، سامانه در حالت خالص قرار دارد و از این رو بدون آمیختگی است. طبق بررسی ها درهم تنیدگی به ازاء تمامی مقادیر α به جز $\alpha = 0$ ، وجود دارد. انتظار می رود که نتایج تحلیلی بدست آمده در مورد ارتباط میزان درهم تنیدگی و اختلاط حالت های معرفی شده در این کار برای مطالعه چگونگی تغییرات درهم تنیدگی حالت های کوانتومی مورد استفاده در فرآیند اطلاعات کوانتومی مفید باشد.

۶. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شهید چمران اهواز- ایران [Grant No. SCU.SP 1400.479] پشتیبانی شده است.

منابع

- [1] Jaeger G., Sergienko A. V., Saleh B. E. A., and Teich M. C., "Entanglement, Mixedness, and spin-flip symmetry in multiple-qubit systems", *Physics Review A* **68**, 022318, 2003.
- [2] Sun Z., Li Q., Yu F., and Chan W. H., "Application of blind quantum computation to two-party quantum computation", *International Journal of Theoretical Physics* **57**, 1864-1871, 2018.
- [3] Hu X-M., Huang C-X., Sheng Y-B., Zhou L., Liu B-H., Guo Y., Zhang C., Xing W-B., Huang Y-F., Li C-F., and Guo G-C., "Long-Distance entanglement purification for quantum communication", *Physical Review Letters* **126**, 010503, 2021.
- [4] Basset F. B., Salusti F., Schweickert L., Rota M. B., Tedeschi D., Covre da Silva S. F., Roccia E., Zwiller V., Jons K. D., Rastelli A., and Trotta R., "Quantum teleportation with imperfect quantum dots", *npj Quantum Information* **7**, 7, 2021.



- [5] Xu J. Z., Guo J. B., Wen W., Bai Y. K., and Yan F., "Entanglement evolution of three-qubit mixed states in multipartite cavity-reservoir systems", *Chinese Physics B* **21**, 080503, 2012.
- [6] Calabrese P., Cardy J., and Tonni E., "Entanglement negativity in quantum field theory", *Physical Review Letters* **109**, 130502, 2012.
- [7] Calabrese P., Cardy J., and Tonni E., "Entanglement negativity in extended systems: a field theoretical approach", *Statistical Mechanics*, 02008, 2013.
- [8] Rangamani M., and Rota M., "Comments on entanglement negativity in holographic field theories", 060, 2014. DOI 0.1007/JHEP10(2014)
- [9] Vidal G., and Werner R. F., "Computable measure of entanglement", *Physical Review A* **65**, 032314, 2002.
- [10] Zyczkowski K., Horodecki P., Sanpera A., and Lewenstein M., "Volume of the set of separable states", *Physical Review A* **58**, 883, 1998.
- [11] Lee J., Kim M. S., Park Y. J., and Lee S., "Partial teleportation of entanglement in a noisy environment", *Journal of Modern Optics* **47**, 2151, 2000.
- [12] He H., and Vidal G., "Disentangling theorem and monogamy for entanglement negativity", *Physical Review A* **91**, 012339, 2015.
- [13] Alba V., "Entanglement negativity and conformal field theory: A Monte Carlo study", *Statistical Mechanics* **1305**, 05013, 2013.
- [14] Gabriel A., and Hiesmayr B., "Macroscopic observables detecting genuine multipartite entanglement and partial inseparability in many-body systems", *Europhysics Letters* **101**, 3003, 2013.
- [15] Horodecki M. P., and Oppenheim J., "Reversible transformations from pure to mixed states and the unique measure of information", *Physical Review A* **67**, 062104, 2003.
- [16] Singh U., Bera M. N., Dhar H. S., and Pati A. K., "Maximally coherent mixed states: complementarity between maximal Coherence and mixedness", *Physical Review A* **91**, 052115, 2015.
- [17] Zheng X., and Zhang G-F., "The effects of mixedness and entanglement on the properties of the entropic uncertainty in Heisenberg model with Dzyaloshinski-Moriya interaction", *Quantum Information Processing* **16**, 1, 2017.
- [18] Paulson K. G., and Satyanarayana S. V. M., "Bounds on mixedness and entanglement of quantum teleportation resources", *Physics Letters A* **381**, 1134-1137, 2017.
- [19] Sarkar D., "On measures of quantum entanglement", *Quantum Information* **14**, 3, 2016.
- [20] Laba H. P., and Tkachuk, "Geometric measure of mixing of quantum state", *Condensed Matter Physics* **21**, 3, 33003, 1-4, 2014.
- [21] Sudarshan E. S. G., "Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams", *Physical Review Letters* **10**, 277-279, 1963.
- [22] Radcliffe J. M., "Some properties of coherent spin states", *Journal of Physics A: General Physics* **4**, 1971.
- [23] Ashrafpour M., Ahmadi M., and Jafarpour M., "Analytical solutions for entanglement a superposition of spin coherent states with non-phase coherence parameters", *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran* **32**, 81-85, 2021.
- [24] Sakurai J.J., "Modern quantum mechanics", Addison-Wesley Press, 2011.
- [25] Dodonov V. V., Manko O. V., Manko V. I., and Wunsche A., "Hilbert-Schmidt distance and non-classicality of states in quantum optics", *Journal of Modern Optics* **47**, 04, 633-654, 2000.

