Research Paper

Non-Classicality Indicators of Entangled and Squeezed Number States[1]

Parvin Sadeghi[*2], Siamak Khademi[3] and Elham Motaghi[4]

Received: 2023.07.04
Revised: 2023.09.27
Accepted: 2023.11.11

Abstract

Many non-classicality indicators are used to measure the quantum effects of different systems. Kenfack's and Sadeghi's non-classicality indicators are introduced regarding the amount of Wigner distribution function's negativities and interferences in phase space quantum mechanics, respectively. Kenfack's non-classicality indicator is used for cases just in the Wigner representation, whereas Sadeghi's non-classicality indicator is effectively, applied for some real distribution functions. In this paper, we investigate these non-classicality indicators for the entangled photon number states in the Wigner, Husimi, and Rivier representations. It is shown that for a two-level entangled state, Sadeghi's indicator has more benefits to measure entanglement with respect to Kenfack's indicator. For the two-level entangled state, we also show a correspondence between Sadeghi's non-classicality indicator and the Von Neumann entropy. It is also shown that for the superposition of the squeezed number state and ground number state, the squeezing parameter affects the entanglement feature and Sadeghi's non-classicality indicator increases with the increase of the squeezing parameter.

Keywords: *Non-classicality Indicator, Wigner Function, Husimi Function, Entangled States, and Squeezed Number States.*

---

[1] https://doi.org/10.22051/ijap.2023.44302.1336
[2] Assistant Professor, Marand faculty of Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran (Corresponding Author). Email: psadeghi@tabrizu.ac.ir
[3] Associate Professor, Department of physics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran. Email: khademi@znu.ac.ir
[4] M. Sc. Graduated, Department of physics, Faculty of Science, University of Zanjan, Zanjan, Iran. Email: emotaghi@znu.ac.ir

مقالهٔ پژوهشی

شاخص‌های غیرکلاسیکی برای حالت‌های عددی درهم‌تنیده و چلانده [1]

پروین صادقی*[2]، سیامک خادمی[3] و الهام متقی[4]

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۳
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۷/۰۵
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۰

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران
دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه الزهرا
سال چهاردهم، پیاپی۳۶، بهار ۱۴۰۳
صص ۸۸ - ۱۰۳

چکیده:

بسیاری از شاخص‌های غیرکلاسیکی برای اندازه‌گیری اثرات کوانتومی سیستم‌های مختلف استفاده می‌شود. شاخص‌های غیرکلاسیکی کنفک و صادقی به ترتیب بر حسب میزان منفی‌ها در تابع توزیع ویگنر و تداخل‌های توابع توزیع حقیقی در مکانیک کوانتومی فضای فاز معرفی شده‌اند. شاخص غیرکلاسیکی کنفک برای بسیاری از حالت‌های کوانتومی تنها در نمایش ویگنر به‌کار می‌رود، اما شاخص غیرکلاسیکی صادقی افزون بر نمایش ویگنر برای سایر توابع توزیع حقیقی، چون توابع توزیع هوسیمی و ریویر، نیز استفاده می‌شوند. در این مقاله، این شاخص‌های غیرکلاسیکی را برای اندازه‌گیری ویژگی‌های کوانتومی برهم نهی و درهم‌تنیدگی حالت‌های عددی در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر مورد بررسی قرار داده شده است. همچنین، مزیت بیشتر شاخص صادقی برای حالت عددی دو ترازه‌ی درهم‌تنیده، نسبت به شاخص کنفک نشان داده شده است. افزون بر این، برای حالت عددی درهم‌تنیده دو ترازی، هماهنگی بین شاخص غیرکلاسیکی صادقی و آنتروپی فن نویمن نشان داده شده است. در پایان نشان داده شد که برای برهم‌نهی حالت‌های عددی پایه چلانده و حالت عددی پایه، پارامتر چلاندگی بر ویژگی درهم تنیدگی تاثیر گذاشته و شاخص غیرکلاسیکی صادقی با افزایش پارامتر چلاندگی افزایش می‌یابد.

واژگان کلیدی: *شاخص غیرکلاسیکی، تابع ویگنر، تابع هوسیمی، حالت‌های درهم‌تنیده، حالت‌های عددی چلانده.*

---

[1] https://doi.org/10.22051/ijap.2023.44302.1336

[2] استادیار، دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران (نویسندهٔ مسئول) Email: psadeghi@tabrizu.ac.ir

[3] دانشیار، گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. Email: khademi@znu.ac.ir

[4] دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران. Email: emotaghi@znu.ac.ir

۱. مقدمه

فرمول‌بندی فضای فاز مکانیک کوانتومی که در سال ۱۹۳۲ توسط ویگنر ارائه شد [۱]، همانند فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک است. تابع توزیع پیشنهادی ویگنر تابع توزیعی حقیقی و غیرمثبت است [۲،۳]. اغلب پژوهشگران براین باورند که منفی بودن تابع توزیع ویگنر نشان‌دهنده برخی از اثرات غیرکلاسیکی برای حالت مورد نظر است [۵،۴]. بر این اساس، کنفک و زیخوویسکی شاخص غیرکلاسیکی را معرفی نمودند که متناسب با سهم منفی تابع توزیع ویگنر است [۶]. شاخص غیرکلاسیکی کنفک برای اندازه‌گیری ویژه‌گی‌های کوانتومی سیستم‌های گوناگون استفاده شده است [۹،۸،۷]. هم ارز با تابع توزیع ویگنر، توابع توزیع متعددی در فضای فاز معرفی شده‌اند، برای مثال؛ تابع توزیع کرکوود [۱۰]، تابع توزیع هوسیمی [۱۱]، تابع توزیع ریویر [۱۲] و توابع توزیع P و Q و غیره [۱۳– ۱۶]. در میان آن‌ها تنها تابع توزیع هوسیمی همواره مثبت است و مقدار منفی ندارد [۳]. از طرفی انتظار می‌رود که مقادیر انتظاری کمیت‌های فیزیکی، جدا از تابع توزیع انتخاب شده باشند. از این رو، انتظار می‌رود که همه توابع توزیع هم ارز [۲، ۳] باشند و انتخاب یک تابع توزیع ویژه برای یک سیستم خاص، تنها به دلیل سادگی در محاسبات باشد [۲،۳،۱۷]. شاخص غیرکلاسیکی کنفک فقط بر اساس تابع توزیع ویگنر [۶] تعریف شده است و برای سایر توابع توزیع حقیقی مناسب نیست [۱۸] . به ویژه برای تابع توزیع همیشه مثبت هوسیمی مقدار شاخص غیرکلاسیکی کنفک، برای همه سیستم‌های کوانتومی، همواره صفر است. در این صورت شاخص غیرکلاسیکی کنفک، باوجود کاربردهای فراوانی که دارد، هم‌ارزی توابع توزیع در فضای فاز را حفظ نمی‌کند. برای کاهش این ناسازگاری صادقی و همکارانش [۱۸] شاخص غیرکلاسیکی دیگری را بر اساس تداخل حالت‌های کوانتومی معرفی کردند که برای توابع توزیع حقیقی مانند؛ هوسیمی، ریویر و همچنین ویگنر هم‌ارزی توابع توزیع را حفظ می‌کند [۲۰–۱۸]. در این مقاله با استفاده از شاخص غیرکلاسیکی صادقی، حالت‌های عددی درهم‌تنیده و چلانده مورد بررسی قرار گرفتند. نشان می‌دهیم، برخلاف شاخص غیرکلاسیکی کنفک، شاخص غیرکلاسیکی صادقی برای اندازه‌گیری ویژگی‌های کوانتومی حالت‌های عددی درهم‌تنیده و چلانده کارایی بهتری دارد. برای مثال، سهم منفی تابع توزیع ویگنر (و در نتیجه شاخص کنفک) در اثر عملگر چلاندگی ثابت می‌ماند و بر اثر تغییر پارامتر چلاندگی نیز تغییر نمی‌کند. بنابراین شاخص غیرکلاسیکی کنفک به پارامتر چلاندگی (به عنوان یک مشخصه مهم کوانتومی) هیچ حساسیتی ندارد. در این مقاله چند حالت عددی درهم‌تنیده و چلانده با استفاده از شاخص غیرکلاسیکی صادقی بررسی شده‌اند. نشان داده

می‌شود برخلاف شاخص غیرکلاسیکی کنفک، شاخص صادقی از حساسیت مناسبی نسبت به پارامتر چلاندگی برخوردار است و برای اندازه‌گیری پارامتر چلاندگی شاخص مناسبی است.
بخش دوم مروری کوتاه بر شاخص‌های غیرکلاسیکی کنفک و صادقی دارد.در بخش‌های سوم و چهارم نیز، به ترتیب، مربوط به محاسبه و مقایسه شاخص‌های غیرکلاسیکی برای برخی از حالت‌های عددی درهم‌تنیده و چلانده است. در پایان نتیجه‌گیری انجام شده است.

۲. شاخص‌های غیرکلاسیکی

برای مجموعه‌های کوانتومی خالص تابع توزیع ویگنر برای حالت $|\psi\rangle$ به صورت

$$W(q,p)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx\langle q-\frac{x}{2}|\psi\rangle\langle\psi|q+\frac{x}{2}\rangle e^{ipx} \quad (۱)$$

تعریف شده است، که q و p به ترتیب مختصه‌های مکان و تکانه همیوغ هستند. کنفک و زیخوویسکی شاخصی غیرکلاسیکی که به مقدار منفی تابع توزیع ویگنر بستگی دارد به شرح زیر تعریف نمودند [۶].

$$\delta=\int_{-\infty}^{\infty}[|W(q,p)|-W(q,p)]dqdp=\int_{-\infty}^{\infty}|W(q,p)|dqdp-1 \quad (۲)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که مقدار این شاخص برای حالت‌های خلاء چلانده و همدوس برابر با صفر است، چرا که، توابع توزیع ویگنر برای آنها غیرمنفی هستند. پارامتر کنفک به ویژگی چلاندگی (که یک ویژگی غیرکلاسیکی است اما سبب ایجاد تغییر در مقدار منفی تابع توزیع ویگنر نمی‌شود) حساس نیست. افزون بر این، این شاخص غیرکلاسیکی در سایر نمایش‌ها، چون نمایش هوسیمی که همواره مثبت است به درستی ویژگی غیرکلاسیکی حالت‌های چلانده را آشکار نمی‌سازد [۱۷- ۲۰]
اگر یک حالت کوانتومی به صورت $\psi=\varphi_1+\varphi_2$ یعنی برهم‌نهی دو حالت باشد، تابع توزیع F مربوط به آن شامل چهار جمله $F=F_{11}(\varphi_1,\varphi_1^*)+F_{22}(\varphi_2,\varphi_2^*)+F_{12}(\varphi_1,\varphi_2^*)+F_{21}(\varphi_2,\varphi_1^*)$ خواهد بود که دو جمله اول جملات غیرتداخلی و دو جمله بعدی تداخلی هستند. در این شرایط شاخص غیرکلاسیکی صادقی با توجه به تداخل حالت‌های کوانتومی در فضای فاز به صورت زیر معرفی می‌شود .

$$\eta=\frac{\sum_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}[|f_{ij}|-f_{ij}]\,dqdp}{\sum_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}[|f_{ij}|+f_{ij}]\,dqdp} \quad (۳)$$

که در آن، $f_{ij} = \mathrm{Re}(F_{ij})$ است. نشان داده شده است که این شاخص هم‌ارزی توابع توزیع حقیقی در فضای فاز را حفظ می‌کند [۱۸].

۳. شاخص‌های غیرکلاسیکی برای حالت درهم‌تنیده

حالت دو ترازه‌ی درهم‌تنیده با استفاده از حالت‌های عددی پایه و اول برانگیخته با رابطه $|\psi_1\rangle = a\,|0,1\rangle + \sqrt{1-a^2}\,|1,0\rangle$ (اول برانگیخته و دوم برانگیخته $|\psi_2\rangle = a\,|1,2\rangle + \sqrt{1-a^2}\,|2,1\rangle$) نشان داده می‌شود. برای سادگی در محاسبات پارامتر برهم‌نهی a حقیقی فرض شده است. تابع توزیع ویگنر حالت $|\psi_1\rangle$ با رابطه

$$\mathrm{W(q,p)=W_{11}+W_{22}+W_{12}+W_{21}} \tag{۴}$$

تعریف می‌شود [۱۸، ۲۲-۲۱]، که

$$W_{11}(q,p) = \frac{2a^2}{\pi^2}(q_1^2 + p_1^2 - \frac{1}{2})\exp[-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 - p_2^2] \tag{۵}$$

$$W_{22}(q,p) = \frac{2(1-a^2)}{\pi^2}(q_2^2 + p_2^2 - \frac{1}{2})\exp[-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 - p_2^2] \tag{۶}$$

$$W_{12}(q,p) + W_{21}(q,p) = \frac{4a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}(q_1 q_2 + p_1 p_2)\exp[-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 - p_2^2] \tag{۷}$$

می‌باشند. همچنین تابع توزیع مثبت هوسیمی از هموار کردن تابع توزیع ویگنر

$$H(q,p) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq'dp'[W(q',p')e^{-(q-q')^2-(p-p')^2}\,] \tag{۸}$$

بدست می‌آید [۱۸، ۳]. برای تابع توزیع هوسیمی حالت $|\psi_1\rangle$

$$H_{11}(q,p) = \frac{a^2}{8\pi^2}(q_1^2 + p_1^2)exp[\frac{-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 + p_2^2}{2}] \tag{۹}$$

$$H_{22}(q,p) = \frac{a^2}{8\pi^2}(q_2^2 + p_2^2)exp[\frac{-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 + p_2^2}{2}] \tag{۱۰}$$

$$H_{12}(q,p) + H_{21}(q,p) = \frac{a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}(\mathrm{q_1 q_2 + p_2 p_2}))exp[\frac{-q_1^2 - p_1^2 - q_2^2 + p_2^2}{2}] \tag{۱۱}$$

است. همچنین تابع توزیع ریویر با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$R(q,p)=\mathrm{Re}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(q)\phi^{*}(p)e^{-ipq}] \tag{۱۲}$$

که در آن،

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dq\psi(q)e^{-ipq} \tag{۱۳}$$

است [۱۸،۱۲]. از این رو، تابع توزیع ریویر برای $|\psi_1\rangle$ برابر روابط (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) است.

$$R_{11}(q,p)=\frac{a^2}{\pi^2}q_1p_1\sin(q_1p_1+q_2p_2)exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2+p_2^2}{2}] \tag{۱۴}$$

$$R_{22}(q,p)=\frac{1-a^2}{\pi^2}q_2p_2\sin(q_1p_1+q_2p_2)exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2+p_2^2}{2}] \tag{۱۵}$$

$$R_{12}(q,p)+R_{21}(q,p)=\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}(p_1q_2+q_1p_2)\sin(q_1p_1+q_2p_2)\\ exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2+p_2^2}{2}] \tag{۱۶}$$

حالت دو ترازه‌ی درهم‌تنیده ($|\psi_2\rangle=a|1,2\rangle+\sqrt{1-a^2}\,|2,1\rangle$) با استفاده از رابطه (۱) در نمایش ویگنر از چهار جمله

$$W_{11}(q,p)=\frac{1-a^2}{\pi^2}(q_1^2+p_1^2-\frac{1}{2})(q_2^4+p_2^4+2q_2^2p_2^2-2q_2^2-2p_2^2+\frac{1}{2})\\ \exp[-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2] \tag{۱۷}$$

$$W_{22}(q,p)=\frac{a^2}{\pi^2}(q_2^2+p_2^2-\frac{1}{2})(q_1^4+p_1^4+2q_1^2p_1^2-2q_1^2-2p_1^2+\frac{1}{2})\\ \exp[-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2] \tag{۱۸}$$

$$W_{12}(q,p)+W_{21}(q,p)=\frac{2a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}[(2q_1^3-2q_1+2p_1^2q_1)\\ (2q_2^3-2q_2+2p_2^2q_2)+p_1p_2(q_1^2-1+p_1^2)\\ (q_2^2-1+p_2^2)]\exp[-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2] \tag{۱۹}$$

تشکیل شده است. حالت $|\psi_2\rangle$ با استفاده از رابطه (۸) در نمایش هوسیمی به صورت زیر است

$$H_{11}(q,p)=\frac{1-a^2}{2\pi^2}(q_1^2+p_1^2)(q_2^4+p_2^4+2q_2^2p_2^2)\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۰}$$

$$H_{22}(q,p)=\frac{a^2}{2\pi^2}(q_2^2+p_2^2)(q_1^4+p_1^4+2q_1^2p_1^2)\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۱}$$

$$H_{12}(q,p)+H_{21}(q,p)=\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}[(q_1^3+p_1^2q_1)(q_2^3+p_2^2q_2)$$
$$+(q_1^2p_1+p_1^3)(q_2^2p_2+p_2^3)]\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۲}$$

همچنین حالت $|\psi_2\rangle$ در نمایش ریویر با استفاده از روابط (۱۳-۱۲) برابر با

$$R_{11}(q,p)=(1-a^2)\sin(q_1p_1+q_2p_2)q_1p_1(q_2^2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-p_2^2)$$
$$\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۳}$$

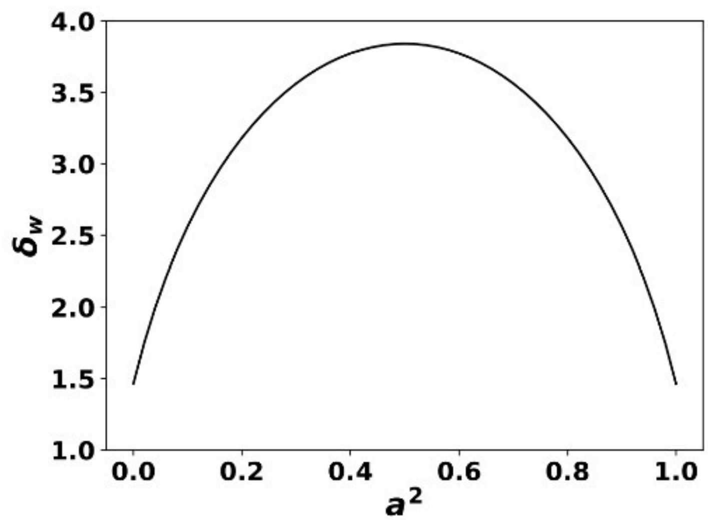
$$R_{22}(q,p)=a^2\sin(q_1p_1+q_2p_2)q_2p_2(q_1^2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-p_1^2)$$
$$\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۴}$$

$$R_{12}(q,p)+R_{21}(q,p)=\frac{a\sqrt{1-a^2}}{\pi^2}\sin(q_1p_1+q_2p_2)[q_1p_2(q_2^2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-p_1^2)$$
$$+q_2p_1(q_1^2-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-p_2^2)]\exp[\frac{-q_1^2-p_1^2-q_2^2-p_2^2}{2}] \tag{۲۵}$$

است.

برای یک حالت درهم‌تنیده خالص، با کمک ماتریس چگالی کاهش یافته ρ، آنتروپی فن‌نیومن $E_{VN}=-Tr(\rho\ln\rho)$، اغلب به عنوان یک سنجه، برای نشان دادن ویژگی درهم‌تنیدگی استفاده می‌شود. آنتروپی فن‌نیومن برای دو حالت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ مشابه و در شکل (۲- الف) بر حسب پارامتر a^2 رسم شده است. در حالت کلی، شاخص کنفک و آنتروپی فن نیومن رفتار یکسانی ندارند. برای مثال، شاخص کنفک برای حالت $|\psi_1\rangle$ در نمایش هوسیمی مقدار صفر، در نمایش

ریویر مقدار ۰.۶۵۳ و در نمایش ویگنر مقدار ۰.۴۲۶ داشته و به پارامتر a بستگی ندارد. بنابراین شاخص کنفک با نمودار آنتروپی فن‌نویمن در شکل (۲- الف) رفتار مشابهی ندارد. برای حالت $|\psi_2\rangle$ نیز شاخص غیرکلاسیکی کنفک در نمایش هوسیمی مقدار ثابت صفر، در نمایش ریویر مقدار ثابت ۱.۴۲۳ است. از این رو، حالت کوانتومی $|\psi_2\rangle$ نیز مشابهتی با نمودار آنتروپی فن‌نیومن در شکل (۲- الف) ندارند. لازم به یادآوری است که شاخص کنفک اغلب در نمایش ویگنر رفتار مناسبی از خود نشان می‌دهد. برای نمونه در شکل (۱- الف) شاخص غیرکلاسیکی کنفک در نمایش ویگنر با نمودار آنتروپی فن‌نیومن در شکل (۲- الف) مشابه است. با وجود آن، شاخص کنفک در نمایش‌های مختلف رفتار مشابهی ندارد. از این رو، نمایش‌های مختلف برای شاخص کنفک هم‌ارز نیستند. در این مقاله منظور از رفتار مشابه، علامت شیب تابع و نقاط بیشینه است.



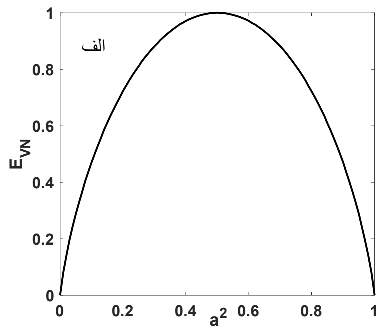
شکل ۱ شاخص غیرکلاسیکی در نمایش ویگنر، δ_W برای حالت درهم‌تنیده $|\psi_2\rangle$ برحسب a^2 (پارامتر a برای سادگی حقیقی فرض شده است).

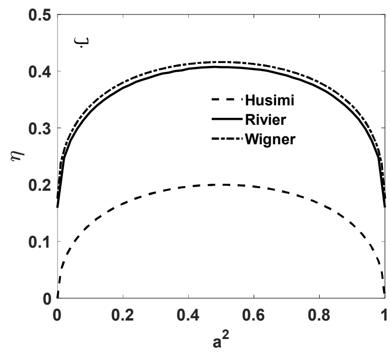
اکنون رفتار شاخص غیرکلاسیکی η را برای همه حالت‌های مورد نظر در نمایش ویگنر، هوسیمی و ریویر بررسی خواهد شد. در شکل (۲- ب)، شاخص غیرکلاسیکی صادقی بر حسب پارامتر a^2 رسم شده است. شاخص η متشکل از سهم منفی‌های جملات تداخلی و غیرتداخلی است. از روابط (۵ تا۱۶) مشاهده می‌شود که در نمایش‌های مختلف سهم منفی جملات غیرتداخلی، مقدار شاخص

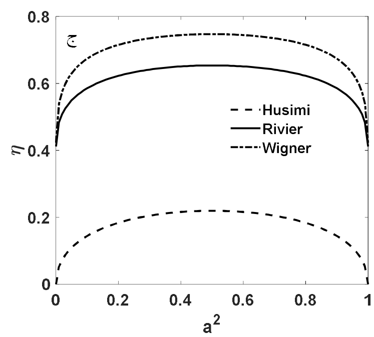
η برای نقاط ابتدا و انتهای منحنی‌های شکل (۲-ب) را مشخص می‌کنند. شاخص η در ابتدای و انتهای ($a^2 = 1,0$) هر یک از منحنی‌های بالا دارای مقادیر یکسانی است که به‌دلیل میزان مساوی سهم منفی در حالت‌های جداگانه $|0,1\rangle$ و $|1,0\rangle$ است. همچنین شاخص غیرکلاسیکی η در $a^2 = 1/2$ (همانگونه که برای حالت‌های شبه بل انتظار می‌رود) دارای بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی است. بیشینه شاخص صادقی در همه نمایش‌های مورد بررسی شکل (۲- ب) کاملاً منطبق با بیشینه آنتروپی فن نیومن شکل (۲- الف) می‌باشد و به روشنی مستقل از نمایش‌های فضای فاز ویگنر، ریویر یا هوسیمی است.

همچنین در شکل (۲- ج) شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت $|\psi_2\rangle$ برحسب a^2 در نمایش ویگنر، هوسیمی و ریویر رسم شده است. اگرچه شاخص غیرکلاسیکی مقادیر متفاوتی برای توابع توزیع مختلف دارد، اما رفتار آن‌ها مطابقت مناسبی با آنتروپی فن نیومن دارد. از این رو، از مقایسه شاخص غیرکلاسیکی η با نمودار آنتروپی فن‌نیومن درتوابع توزیع مورد بررسی دیده می‌شود که این توابع توزیع هم ارز هستند.

شاخص غیرکلاسیکی η نشانگر ویژگی‌های کوانتومی سیستم است. یکی از این ویژگی‌ها میزان درهم‌تنیدگی است که با سهم منفی‌های جملات تداخلی در شاخص η خود را نشان می‌دهد که رفتار مشابهی را در هر سه تابع توزیع دارد. از طرف دیگر سهم منفی‌های جملات غیرتداخلی نیز ویژگی‌های کوانتومی حالت‌های سیستم در $a^2 = 0,1$ را نشان می‌دهد که در نمایش‌های مختلف متفاوت است. تفاوت (مشابهت) شاخص غیرکلاسیکی η ناشی از جملات غیرتداخلی (تداخلی) است که ناشی از اثرات کوانتومی حالت‌ها در $a^2 = 0,1$ (اثرات درهم‌تنیدگی $0 < a^2 < 1$) می‌باشد.







شکل ۲ (الف) آنتروپی فن نویمن، E_{VN}، برای دو حالت $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ مشابه است که برحسب a^2 رسم شده است، (ب) شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت درهم‌تنیده عددی پایه و برانگیخته اول برحسب a^2 برای تابع توزیع ویگنر، هوسیمی و ریویر، (ج) شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت عددی درهم‌تنیده برانگیخته اول و دوم.

۴. شاخص‌های غیرکلاسیکی برای حالت‌های چلانده

حالت‌های عددی چلانده نمونه دیگری از حالت‌های غیرکلاسیک هستند. شاخص‌های غیرکلاسیکی δ و η در تک حالت‌های چلانده، به‌پارامتر چلاندگی حساس نیستند، چرا که، مقدار منفی توابع توزیع در اثر عملگر چلاندگی تغییر نمی‌کند. اما برای برهم‌نهی حالت‌های چلانده نتیجه متفاوت است.

در اینجا برهم‌نهی حالت‌های عددی پایه غیرچلانده و چلانده، $|\psi_3\rangle = \sqrt{1-a^2}\,|0\rangle + a\,|0,r\rangle$ بررسی می‌شود. در این رابطه a و r به ترتیب دامنه احتمال برهم نهی و پارامتر چلاندگی هستند. بخش‌های غیر تداخلی و تداخلی تابع توزیع ویگنر برای $|\psi_3\rangle$ توسط روابط

$$W_{11}(q,p)=\frac{1-a^2}{\pi}\mathrm{e}^{-q^2-p^2} \tag{۲۶}$$

$$W_{22}(q,p)=\frac{a^2}{\pi}\mathrm{e}^{-e^{2r}q^2-e^{-2r}p^2} \tag{۲۷}$$

$$W_{12}(q,p)+W_{21}(q,p)=\frac{2a\sqrt{2(1-a^2)}}{\pi\sqrt{1+e^{2r}}}\cos(\frac{2qp(e^{2r}-1)}{1+e^{2r}})\mathrm{e}^{\frac{r}{2}-\frac{2e^{2r}q^2}{1+e^{2r}}-\frac{p^2}{1+e^{2r}}} \tag{۲۸}$$

نشان داده می‌شوند [۲۳،۱۸]. همچنین در نمایش هوسیمی حالت $|\psi_3\rangle$ به صورت

$$H_{11}(q,p)=\frac{1-a^2}{2\pi}exp(\frac{-q^2-p^2}{2}) \tag{۲۹}$$

$$H_{22}(q,p)=\frac{a^2}{\pi\sqrt{(e^{2r}+1)(e^{-2r}+1)}}exp(-\frac{q^2}{e^{-2r}+1}-\frac{p^2}{e^{2r}+1}) \tag{۳۰}$$

$$H_{12}(q,p)+H_{21}(q,p)=\frac{a\sqrt{2(1-a^2)}}{\pi\sqrt{e^{2r}+1}}\cos(\frac{qp(e^{2r}-1)}{2(e^{2r}+1)})\\ \exp(\frac{r}{2}-\frac{q^2(3e^{2r}+1)+p^2(3+e^{2r})}{4(e^{2r}+1)}) \tag{۳۱}$$

است. همچنین، در نمایش ریویر

$$R_{11}(q,p)=(1-a^2)\cos(qp)\exp(\frac{-q^2-p^2}{2}) \tag{۳۲}$$

$$R_{22}(q,p)=a^2\cos(qp)\exp(\frac{-q^2e^{2r}-p^2e^{-2r}}{2}) \tag{۳۳}$$

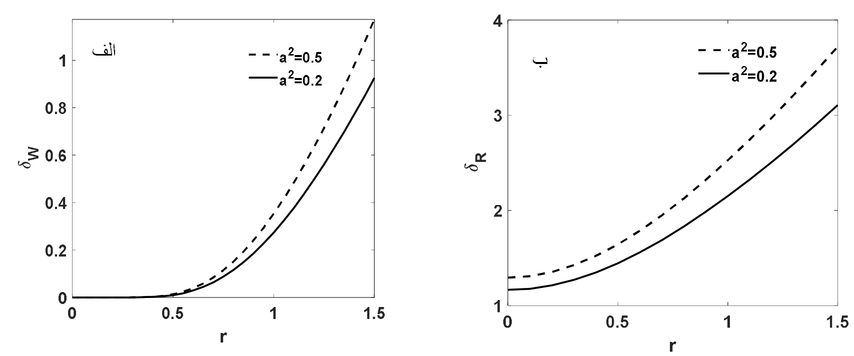
$$R_{12}(q,p)+R_{21}(q,p)=a\sqrt{(1-a^2)}\cos(qp)[\exp(\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}q^2e^{2r}-\frac{1}{2}p^2)\\ +\exp(-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}p^2e^{-2r})] \tag{۳۴}$$

است. در شکل (۳- الف و ب)، شاخص غیرکلاسیکی δ به ترتیب در نمایش ویگنر و ریویر برحسب پارامتر چلاندگی، r، به ازای مقادیر $a^2=0.2,0.5$ رسم شده است، در حالی که، این شاخص در نمایش هوسیمی برابر با صفر است. شاخص غیرکلاسیکی η برای $|\psi_3\rangle$ برحسب

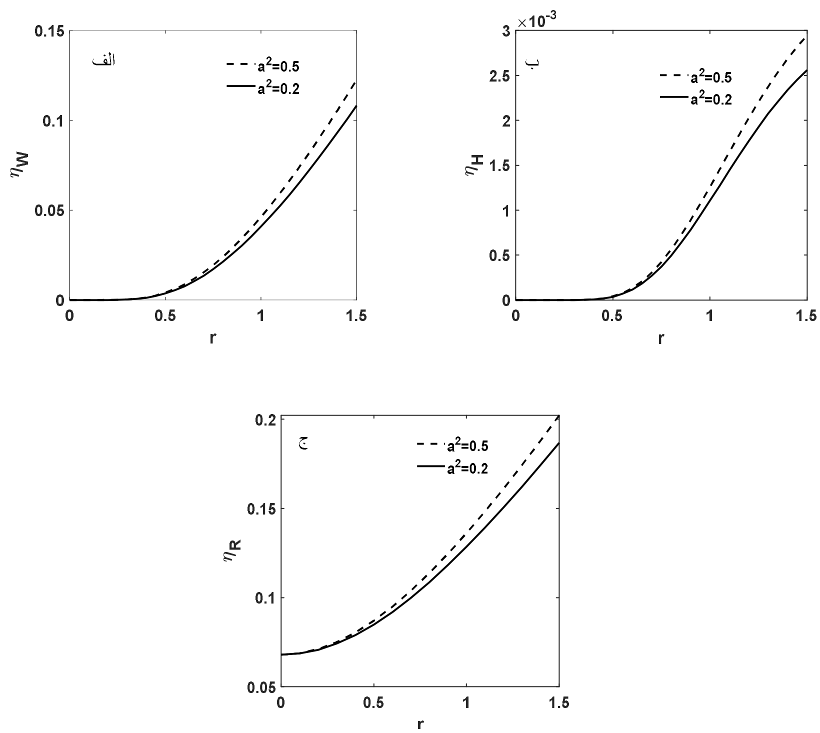
پارامتر چلاندگی، r ، برای $a^2 = 0.2, 0.5$ در شکل (۴- الف)، (۴- ب) و (۴- ج) به ترتیب در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر رسم شده است. با توجه به این که شاخص η مرتبط با مقدار منفی جملات تداخلی و غیر تداخلی تابع توزیع است، برای تابع توزیع هوسیمی که همیشه مثبت است، انتظار مقادیری بزرگ برای η را نداریم. از این رو، مقادیر اندک منفی جملات تداخلی در تابع توزیع هوسیمی (در مقایسه با تابع توزیع ویگنر و ریویر) از اهمیت بسزایی برخوردارند.

شاخص غیرکلاسیکی η بر حسب پارامتر چلاندگی در بازه $0 \le r \le 1.5$ در هر سه نمایش تابعی افزایشی است. بنابراین بر خلاف شاخص کنفک، شاخص غیرکلاسیکی η نسبت به پارامتر چلاندگی حساس بوده و در هر سه نمایش رفتاری مشابه را نشان می‌دهد که دوباره تاییدی بر حفظ هم‌ارزی توابع توزیع فضای فاز است.

در $r = 0$ حالت سیستم به صورت $|\psi_3\rangle = \sqrt{1-a^2}\,|0\rangle + a\,|0,r\rangle|_{r=0} = |0\rangle$ است. در نمایش هوسیمی و ویگنر تابع توزیع برای این حالت در r=0 یک تابع گوسی است و مقدار منفی ندارد. از این رو، در $r = 0$ ، مقدار شاخص $\eta = 0$ است. با استفاده از رابطه‌های (۲۳) تا (۲۵)، تابع توزیع ریویر در $r = 0$ برابر است با $R(q,p)|_{r=0} = \cos(qp)\exp(\frac{-q^2 - p^2}{2})$ که به دلیل وجود جمله کسینوسی مقادیر منفی دارد که در نقاط ابتدایی و انتهایی منحنی شاخص غیرکلاسیکی η خود را نشان می‌دهد.



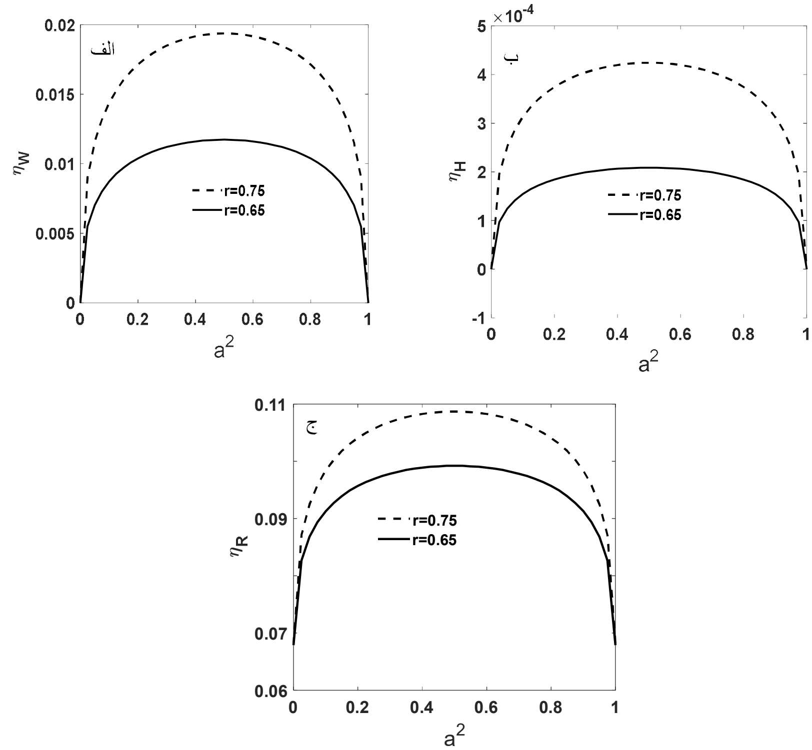
شکل ۳ شاخص غیرکلاسیکی δ برای برهم‌نهی حالت‌های عددی پایه و پایه چلانده شده برحسب پارامتر r، برای دو مقدار $a^2 = 0.2, 0.5$ برای تابع توزیع (الف) ویگنر و (ب) ریویر.



شکل ۴ شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت‌های چلانده $|\psi_3\rangle$، برهم‌نهی حالت‌های عددی پایه و پایه چلانده، برحسب پارامتر چلاندگی، r، به ازای مقادیر $a^2 = 0.2, 0.5$ در نمایش (الف) ویگنر، (ب) هوسیمی و (ج) ریویر است. در هر سه نمودار شیب نمودار مثبت است، بنابراین منحنی‌ها دارای رفتار مشابه هستند. اگرچه تغییرات شیب نمودار متفاوت است.

در شکل (۵)، شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت $|\psi_3\rangle$ در هر سه نمایش ویگنر، ریویر و هوسیمی به ازای مقدار ثابت ضریب چلاندگی $r = 0.65, 0.75$ برحسب a^2 رسم شده است. در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای میزان چلاندگی ثابت رفتار شاخص η برحسب a^2 مشابه شکل (۲) است و تنها مقدار بیشینه η به ازای مقادیر مختلف پارامتر چلاندگی متفاوت است. از شکل (۵) دیده می‌شود که با افزایش چلاندگی میزان بیشینه η که نشانگری از بیشینه درهم‌تنیدگی است، افزایش

می‌یابد. از این رو، این دو اثر کوانتومی درهم‌تنیدگی و چلاندگی بر روی هم تاثیر دارند. اگرچه نوع تاثیر آن هنوز برای ما مشخص نیست.



شکل ۵ شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت‌های چلانده $|\psi_3\rangle$، برحسب a^2 به ازای مقدار ثابت ضریب چلاندگی $r = 0.65, 0.75$ در نمایش الف- ویگنر، ب- هوسیمی و ج- ریویر است. دیده می‌شود که با افزایش چلاندگی میزان بیشینه η که نشانگری از بیشینه درهم‌تنیدگی است افزایش می‌یابد. بنابراین این دو اثر کوانتومی درهم‌تنیدگی و چلاندگی بر روی هم تاثیر دارند.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

شاخص غیرکلاسیکی کنفک تنها در نمایش ویگنر پاسخ‌های مناسبی دارد اما رفتار این شاخص در سایر نمایش‌های فضای فاز هم‌ارز نیست و رفتار متفاوتی را از خود نشان می‌دهد. از طرف دیگر، شاخص غیرکلاسیکی صادقی برای توابع توزیع حقیقی مانند؛ ویگنر، هوسیمی و ریویر رفتاری مشابه و کمینه در نمایش‌های مورد بررسی هم ارزی مناسبی را نشان می‌دهد. در این مقاله، برای ایجاد حالت‌های درهم‌تنیده از دو ویژه حالت، از حالت‌های عددی، استفاده شده است. شاخص

غیرکلاسیکی کنفک در نمایش‌های ویگنر، ریویر و هوسیمی برای حالت درهم‌تنیده عددی پایه و حالت اول برانگیخته، برحسب پارامتر a مقدار ثابتی دارد. بنابراین شاخص مناسبی برای درهم‌تنیدگی در سایر نمایش‌های فضای فاز نیست. از سوی دیگر، رفتار نمودار شاخص غیرکلاسیکی η در هر سه نمایش ویگنر، ریویر و هوسیمی با رفتار آنتروپی فن نویمن برای سیستم مورد بررسی به‌خوبی هماهنگی دارد. شاخص غیرکلاسیکی η، همانند آنتروپی فن‌نیومن، برحسب پارامتر a^2 برای حالت‌های شبه‌بل دارای بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی است و بیشینه این شاخص در همه نمایش‌های مورد بررسی کاملاً منطبق با بیشینه آنتروپی فن نیومن است که مستقل از نمایش فضای فاز است. همچنین نتایج مشابهی برای حالت درهم‌تنیده اول برانگیخته و دوم برانگیخته بدست آمد. از این رو، شاخص غیرکلاسیکی η هم ارزی توابع توزیع مورد بررسی را در نمایش‌های مورد بررسی حفظ می‌کند.

در این مقاله، افزون بر ویژگی غیرکلاسیکی درهم‌تنیدگی، رفتار شاخص‌های کنفک و η برای حالت‌های چلانده نیز مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور از برهم‌نهی حالت‌های چلانده استفاده شده است، زیرا مقدار منفی توابع توزیع در اثر عمل چلاندگی تغییر نمی‌کند و باوجود اینکه هر دو شاخص‌های غیرکلاسیکی کنفک و η در تک حالت‌های چلانده، به پارامتر چلاندگی حساس نیستند. اگرچه برای حالت برهم‌نهی حالت پایه و پایه چلانده در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر به‌پارامتر چلاندگی حساس هستند. نشان داده شد که رفتار شاخص غیرکلاسیکی کنفک در حضور پارامتر چلاندگی در نمایش‌های مختلف یکسان نیست و هم‌ارزی توابع توزیع را حفظ نمی‌کند. در حالی که شاخص غیرکلاسیکی η بر حسب پارامتر چلاندگی در بازه $0 \le r \le 1.5$ به روشنی در هر سه نمایش تابعی افزایشی و دارای رفتاری مشابه است. از این رو، بر خلاف شاخص کنفک، شاخص غیرکلاسیکی η نسبت به پارامتر چلاندگی حساس است و در هر سه نمایش رفتاری مشابه را نشان می‌دهد که دوباره تاییدی بر حفظ هم‌ارزی توابع توزیع فضای فاز است.

همچنین در شکل (۵)، به روشنی نشان داده شد که ویژگی درهم تنیدگی تحت تاثیر چلاندگی قرار می‌گیرد. اما این نکته بسیار مهم و قابل تامل است که:

الف) چه سهمی از η ناشی از درهم‌تنیدگی و چه سهمی ناشی از چلاندگی است؟ آیا این سهم ها قابل جداسازی است؟

ب) در سیستم‌های مختلف میزان چلاندگی چگونه وچه نوع تاثیری بر میزان درهم‌تنیدگی دارد؟

این موارد و کاربردهای آن هنوز سوال‌هایی باز هستند که نویسندگان امیدوارند در آینده به آن بپردازند.

منابع

[1] Wigner E.P., "On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium", *Physical Review,* **40,** 49, 1932. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.40.749

[2] Hillery M., Oconnel R.F., Scully M.O. and Wigner E.P., "Distribution functions in physics: Fundamentals", *Physics Reports,* **106**, 121-167, 1984. 10.1016/0370-1573(84)90160-1

[3] Lee H.W., "Theory and application of the quantum phase-space distribution functions", *Physics Reports,* **259,** 147-211, 1995. https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00007-4

[4] Nogues G., Rauschenbeutel A., Osnaghi S., Bertet P., Brune M., Raimond J.M., Haroche S., Lutterbach L.G. and Davidovich L., "Measurement of a negative value for the Wigner function of radiation", *Physical Review A,* **62,** 054101, 2000. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.054101

[5] Rigas I., Sanchez-Soto L.L., Klimov A.B., Rehacek J. and Hradil Z., "Orbital angular momentum in phase space", *Annals of Physics,* **326,** 426-439, 2011. https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.11.016

[6] Kenfack A. and Zyczkowski K., "Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics,* **6,** 396, 2004. https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/10/003

[7] Hertz A. and Bièvre S. De, "Decoherence and nonclassicality of photon-added and photon-subtracted multimode Gaussian states", *Physical Review A,* **107**, 043713, 2023. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.107.043713

[8] Tinh P. N. D. and Duc T. M., "Photon-added squeezing-enhanced coherent state and its nonclassical and non-Gaussian properties", *Optik,* **287**, 171019, 2023. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.171019

[9] Le T. H. T., Ho S. C., Tran Q. D. and Truong M. D., "Enhancement of dynamical entanglement in a dispersive two-mode Jaynes–Cummings model via superposition of photon-added pair coherent state", *Laser Physics Letters,* **20**, 75203, 2023. 10.1088/1612-202X/acde74

[10] Kirkwood J.G., "Quantum statistics of almost classical assemblies", *Physical Review,* **44**, 31, 1933. https://doi.org/10.1103/PhysRev.44.31

[11] Husimi K., "Some formal properties of the density matrix", *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series,* **22**, 264-314, 1940. https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.22.4_264

[12] Rivier D.C., "On a one-to-one correspondence between infinitesimal canonical transformations and infinitesimal unitary transformations", *Physical Review,* **83**, 862, 1951. https://doi.org/10.1103/PhysRev.83.862

[13] Glauber R.J., "The Quantum theory of optical coherence", *Physical Review,* **131**, 2766, 1963. https://doi.org/10.1103/PhysRev.130.2529

[14] Glauber R. J., *In Quantum Optics and Electronics*, New York, 1965.

[15] Chaturvedi S., Drummond P. D. and Walls D. F., "Two photon absorption with coherent and partially coherent driving fields", *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **10**, L187, 1977. https://doi.org/10.1088/0305-4470/10/11/003

[16] Drummond P.D. and Deuar P., "Quantum dynamics with stochastic gauge simulations", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics,* **5**, S281, 2003. https://doi.org/10.1088/1464-4266/5/3/359
[17] Sadeghi P., Khademi S., Darooneh A.H., "Tsallis entropy in phase-space quantum mechanics", *Physical Review A,* **86**, 012119, 2012. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.012119
[18] Sadeghi P., Khademi S., Nasiri S., "Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution function", *Physical Review A,* **82**, 012102, 2010. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.012102
[19] Kenfack A., "Comment on Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution functions", *Physical Review A,* **93**, 036101, 2016. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.036101
[20] Khademi S., Sadeghi P., Nasiri S., "Reply to "Comment on 'Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution functions'"", *Physical Review A,* **93**, 36102, 2016. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.036102
[21] Schleich W.P., *Quantum Optics in Phase Space*, Berlin, 2001.
[22] Mansour H. A. and Siyouri F. Z., "Wigner function as a detector of entanglement in open two coupled in as semiconductor quantum dots", *International Journal of Theoretical Physics volume*, **61**, s10773-022-05094-x, 2022. https://doi.org/10.1007/s10773-022-05094-x
[23] Albano L., Mundarain D. F. and Stephany J., "On the squeezed number states and their phase space representations", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics,* **4**, 352–357, 2002. https://doi.org/10.1088/1464-4266/4/5/319