Analytical Solution of the Equation Related to the Oscillations of Ap Pulsating Stars Under the Effect of Rotation[1]

Fatemeh Azizi[2]

Abstract

Rapidly oscillating Ap stars are a special type of variable stars that are not in hydrostatic equilibrium. Their pulsation period is very short compared to other stars of this group and is less than one hour. These stars have spectral type A and lines related to rare-earth elements are increasingly observed in their spectrum, so they are known as Ap stars. In this research, the equation of motion of the rapidly oscillating Ap star was solved using the perturbation method in the presence of a smooth and uniform rotation and it was determined that under the effect of rotation in the stellar system, the modes are coupled among themselves. Each mode with a specific l is separated into 2l+1 modes due to rotation, and each of these modes under disturbance does not correspond to a specific value of m, but each mode under perturbation consists of a linear combination of m=2l+1modes.

Keywords: *Perturbation Method, Stellar Oscillation, Pulsating Stars, Coupling.*

1 DOI: 10.22051/ijap.2024.47591.1416

[2]Assistant Professor, Department of Physics, Payame Noor University, Tehran, Iran. Email: f.azizi@pnu.ac.ir

حل تحلیلی معادله حاکم بر نوسانات ستارگان تپنده A_p تحت اثر دوران[1]

فاطمه عزیزی[2]

چکیده:
ستارگان نوسان کننده سریع A_p نوع ویژه‌ای از ستارگان متغییر هستند که در حال تعادل هیدرواستاتیکی نیستند و دوره تپش آن‌ها درمقایسه با سایر ستارگان این گروه بسیار کوتاه و از مرتبه‌ی کمتر از یک ساعت است. این ستارگان دارای نوع طیفی A هستند و در طیف‌شان خطوط مربوط به عناصر نادرخاکی به صورت فزاینده‌ای مشاهده می‌شوند و به همین خاطر به ستارگان A_p معروف هستند. در این پژوهش، معادله حرکت ستاره نوسان‌کننده سریع A_p در حضور یک دوران آرام و یکنواخت به کمک روش اختلالی حل شد و مشخص گردید که تحت اثر دوران سامانه ستاره‌ای، مُدها بین خودشان کوپله می‌شوند. در حقیقت، هر مُد با l مشخص در اثر دوران ستاره به $m = 2l + 1$ مُد جداسازی‌شده که هر یک از این مُدها مربوط به یک مقدار ویژه‌ای m نمی‌باشد، بلکه هر مُد تحت اختلال، متشکل از ترکیب خطی $m = 2l + 1$ مُد غیراختلالی می‌باشد.

واژگان کلیدی: *ستارگان تپنده، نوسان ستاره‌ای، روش اختلالی، کوپلاژ.*

[1] DOI: 10.22051/ijap.2024.47591.1416

[2] استادیار، گروه فیزیک، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران. Email: f.azizi@pnu.ac.ir

۱. مقدمه

ستارگان تپنده سریع اغلب با نوع طیفی A و میدان‌های مغناطیسی شدیدی از مرتبه ۳۵ کیلوگاوس هستند [۱]. شدت میدان مغناطیسی قوی این ستارگان می تواند به دلیل دوران سریع محوری ستاره باشد. برای ستارگان نوع طیفی A و F_0 افزون بر دوران سریع، فرآیند انتقال انرژی در اطراف استوای مغناطیسی نیز همرفتی است ، بنابراین انتظار می‌رود که سطح ستارگان تپنده‌ی سریع A_p در اطراف استوای مغناطیسی، یک سطح همرفتی باشد [۲].

نوسانات سریع ستارگان A_p برای اولین بار از راه مشاهدات هدفمند این ستارگان توسط کورتز (۱۹۷۸) کشف شد [۳]. از زمان کشف آن‌ها بیش از ۷۵ ستاره نوسان کننده سریع از راه مشاهدات زمینی و فضایی شناسایی شده‌اند [۴-۹]. این ستارگان دارای دوره‌ی تپشی در حدود کمتر از یک ساعت، بیشتر بین ۵ دقیقه [۸] الی ۲۴ دقیقه [۱۰] هستند، به همین دلیل آن‌ها را تپنده‌ی سریع نامیده‌اند [۱۲,۱۱].

در طیف این ستارگان عناصر نادر خاکی چون یوروپیم، ایتریم وعناصری مثل کروم، استرانسیم و سیلیسیوم مشاهده شده است [۱۳]. شدت خطوط مشاهده شده این عناصردر این نوع از ستارگان نسبت به دیگر ستارگان نوع طیفی A خیلی بیشتر است. لافتینگر و همکارانش (۲۰۱۰)، به کمک داده‌های طیفی با توان جداسازی بالا، فراوانی این عناصر را بیش از میلیون برابر مشاهده شده در خورشید اندازه‌گیری نمودند [۱۴]. به همین دلیل، ویژگی‌های موجود در طیفشان به A_p موسومند. از آنجایی که عناصر نادر خاکی دارای ممان مغناطیسی خیلی قوی می‌باشند، شدت میدان مغناطیسی قوی می‌تواند به دلیل وجود عناصر نادر خاکی نیز باشد [۱۵]. قبل از پرتاب تلسکوپ فضایی کپلر، بیشتر مطالعات ستارگان نوسان کننده سریع A_p از راه مشاهدات نورسنجی مبتنی بر داده‌های زمینی به همراه داده‌های طیف‌سنجی با توان جداسازی بالا و برخی مشاهدات فضایی با ماهواره‌های MOST ، WIRE، و BRITE انجام شده است. این گونه رصدها اغلب داده‌هایی در مورد یک ستاره ارائه می‌دهند. ولی کپلر در طول مدت ماموریت خود، حداقل ۱۴ ستاره نوسان‌کننده سریع A_p جدید را رصد نموده است [۱۶].

این ستارگان یک ناحیه‌ی ناپایدار در بالای رشته‌ی اصلی در نمودار هرتز *پرونگ راسل* را به خود اختصاص می‌دهند. هر چقدر ستاره به ناحیه غول‌ها نزدیک‌تر شود، بیشتر منبسط شده و چگالی ستاره کاهش می‌یابد.

از این‌رو، بر اساس رابطه $T\sqrt{\rho} = Const$ که T دوره تپش ستاره و ρ چگالی متوسط ستاره است، دوره تپش ستارگان غول طولانی‌تر از دوره تپش ستارگان نزدیک به رشته اصلی می‌باشد. با این توضیحات ستارگان تپنده‌ای که دارای دوره تپش طولانی‌تری هستند، از رشته اصلی دورترند، در حالی که ستارگانی که دوره ی تپش کوتاهتری دارند به رشته اصلی نزدیکترند.

۲. فرآیند تپش ستاره

تپش یک ستاره ناشی از این است که ستاره در تعادل هیدرواستاتیکی نیست. نیروی گرانش و نیروی بدست آمده از تغییرات فشار، نیروهایی هستند که بر یک عنصر از ستاره وارد می‌شوند. اگر این دو نیرو در تعادل نباشند، ستاره شروع به تپش می‌کند. اگر ستاره‌ای در اثر افزایش فشار گاز منبسط شود، چگالی ماده و فشار کاهش می‌یابد تا به نقطه تعادل هیدرواستاتیکی برسد و سپس به دلیل پایستگی تکانه خطی انبساط ستاره همچنان ادامه می‌یابد، تا اینکه بالاخره گرانش حکمفرما شده و ستاره شروع به انقباض کند. تکانه مواد در حال سقوط، انقباض را در ورای نقطه تعادل حمل می‌کند، بدین ترتیب دوباره فشار افزایش یافته و این فرآیند دوباره تکرار می‌شود. در خلال این فرآیند انرژی از بین می‌رود و سرانجام این کاهش انرژی میرایی تپش‌ها را به دنبال خواهد داشت و اگر نیروی محرکی نباشد تپش ستاره متوقف خواهد شد.

با توجه به اینکه کدری به عنوان مقدار انرژی تابشی جذب شده تعریف می‌شود، بنابراین تغییر کدری در جو یک ستاره مانند یک سوپاپ عمل خواهد کرد. هنگامی که جو یک ستاره شفاف است تابش آزادانه شارش می‌یابد و ستاره پر نور می‌شود و برعکس هنگامی که کدری بالا است، از فرار تابش جلوگیری شده و ستاره کم نور می‌شود. اگر ستاره در زمان بیشینه کدری متراکم شده باشد، تابش اضافی میرا می‌شود و فشاری بر لایه‌های خارجی ستاره وارد می‌کند، این فرآیند انرژی لازم برای ادامه تپش‌ها را فراهم می‌کند.

جو ستارگان تپنده دارای منطقه‌ای است که در آن کدری زیاد می‌شود. چرا که هلیوم یک بار یونیده تابش ماوراء بنفش را جذب می‌کند تا به هلیوم دوبار یونیده تبدیل شود. از آنجایی که جهت یونیدگی گاز انرژی خرج می‌شود، ناحیه یونیده He^{+} سردتر از نواحی اطراف آن است. منطقه هلیوم یونیده در پایداری جو ستاره سهیم است و بنابراین تپش‌ها همیشگی می‌شوند. این فرآیند به عمق ناحیه یونیده He^{+} بستگی دارد و این عمق نیز به ساختار ستاره وابسته است که در حقیقت،

تابع مرحله‌ای از تحول ستاره است. هنگامی که این منطقه در عمق زیاد قرار گیرد، عمل سوپاپ برای غلبه بر میرایی کافی نیست [۱۷].

۳. محاسبات و روش‌ها

هدف اصلی این پژوهش، بررسی اثر دوران روی مُدهای نوسانی ستارگان تپنده سریع A_p می‌باشد. ستارگان حقیقی هم دارای چرخش و هم دارای میدان مغناطیسی هستند و لازم است اثر هر دو بر بسامد نوسانات ستاره‌ای در نظر گرفته شود. در این پژوهش تنها اثر یک دوران آرام را بر روی نوسانات ستاره‌ای که در حالت تعادل دارای تقارن کروی است، در نظر گرفته می‌شود. در این بررسی همچنین فرض می‌شود که ستاره با سرعت ثابت دوران می‌کند، یعنی $|\Omega| = cte$. در این صورت دوران ستاره منجر به حضور دو نیروی کوریولیس وگریزاز مرکز می‌گردد. با توجه به اینکه دوران آرام در نظر گرفته می‌شود، از این‌رو، در این بررسی می‌توان اثرات مربوط به نیروی گریز از مرکز که با Ω^2 متناسب است را نیز کنار گذاشت.

۳-۱ معادله حاکم بر نوسانات ستارگان نوسان‌کننده سریع A_p در حضور دوران

معادله حاکم بر نوسانات ستاره‌ای را می‌توان از راه معادلات اساسی مکانیک سیالات بدست آورد. فرض بر این است که ستاره در حال تعادل هیدرواستاتیکی است و سرعت زاویه‌ای دارای تقارن محوری است، داریم:

$$\Omega = \left[\Omega(r,\theta)Cos\theta, -\Omega(r,\theta)Sin\theta, 0\right] \qquad (۱۰)$$

میدان سرعت تعادلی v_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{v}_0 = \vec{\Omega}\times\vec{r} = \left(0, 0, r\Omega Sin\theta\right) \qquad (۱۱)$$

به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که میدان سرعت تعادلی v_0 یک میدان سیم لوله‌ای است که حاصلضرب اسکالر v_0 با گرادیان هر کمیت اسکالر f_0 منجر خواهد شد به

$$\vec{v}_0.\vec{\nabla}f = \left(r\Omega Sin\theta\hat{e}_\phi\right).\left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{rSin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{e}_\phi\right)f \qquad (۱۲)$$

معادلات خطی بقای جرم، انرژی و حرکت به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{v}'+\rho'\vec{v}\right)=0 \tag{۱۳}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s'}{\partial t}+\left(\vec{v}_0.\vec{\nabla}\right)s'+\left(\vec{v}_0'.\vec{\nabla}\right)s\right)=0 \tag{۱۴}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v'}{\partial t}+\left(\vec{v}_0.\vec{\nabla}\right)\vec{v}'+\left(\vec{v}'.\vec{\nabla}\right)v_0\right)+\rho'\left(\vec{v}_0.\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0+\vec{\nabla}P'+\rho'\vec{\nabla}\phi+\rho\vec{\nabla}\phi'=0 \tag{۱۵}$$

معادله‌ی بقای اندازه حرکت خطی هم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\vec{v}\,\delta V\right)=\left(\vec{f}-\vec{\nabla}P\right)\delta V \tag{۱۶}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\vec{f}}{\rho}-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}\right) \tag{۱۷}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \tag{۱۸}$$

از طرفی،

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)+\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \tag{۱۹}$$

از آنجایی که $\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)$، تابع صریحی از زمان نمی‌باشد، از این‌رو، $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=0$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) \tag{۲۰}$$

از مقایسه رابطه (۱۸) با رابطه (۲۰) خواهیم داشت:

$$\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right)=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \tag{۲۱}$$

که معادله بقای اندازه حرکت بدون اختلال است. مفهوم فیزیکی آن عبارتند از آهنگ تغییر اندازه حرکت یک جزء از سیال متحرک نسبت به زمان برابر است با مجموع نیروی حجمی و نیروی ناشی از فشار وارد بر آن. حال با قرار دادن رابطه ی (۱۲) در دومعادله ی (۱۳) و (۱۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\Omega\frac{\partial \rho'}{\partial \phi}+\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{v}'\right)=0 \tag{۲۲}$$

$$T\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\frac{\partial}{\partial \phi}\right)s'+\vec{v}'.\vec{\nabla}s\right]=0 \tag{۲۳}$$

عبارت داخل پرانتز بیانگر مشتق زمانی مربوط به یک سامانه دورانی با سرعت زاویه‌ای Ω است. با قرار دادن رابطه (۱۱) در معادله خطی شده‌ی حرکت و با استفاده از روابط بین بردارهای واحد در سامانه مختصات قطبی کروی،

$$\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} = Sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \phi} = Cos\theta \hat{e}_\phi$$

$$\frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} = -Sin\theta \hat{e}_r - Cos\theta \hat{e}_\theta = -\hat{h}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \left(\vec{v}'.\vec{\nabla}\Omega\right) r Sin\theta \hat{e}_\phi = -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p' + \frac{\rho'}{\rho^2}\vec{\nabla}p \quad (۲۴)$$

نخستین جمله در طرف چپ بیانگر مشتق زمانی سرعت مربوط به یک سامانه در حال دوران است. دومین جمله، نشان دهنده‌ی نیروی کوریولیس و جمله‌ی سوم ناشی از چرخش دیفرانسیلی یا همان دوران غیریکنواخت است.

تغییرات اولری سرعت یعنی v' بر حسب جابه‌جایی ξ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\vec{v}' = \delta\vec{v} - \left(\vec{\xi}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0 = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \left(\vec{v}_0.\vec{\nabla}\right)\vec{\xi} - \left(\vec{\xi}.\vec{\nabla}\right)\vec{v}_0$$

$$\vec{v}' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\xi_i \hat{e}_i - \left(\vec{\xi}.\vec{\nabla}\Omega\right) r Sin\theta \hat{e}_\phi \quad (۲۵)$$

و نیز طرف چپ معادله (۲۱) بیانگر نیروی گریز از مرکز می‌باشد که با فرض دوران آرام می‌توان از آن صرفنظرکرد. همچنین، دوران نیز یکنواخت در نظر گرفته شده بود، یعنی $\Omega = cte \rightarrow \vec{\nabla}\Omega = 0$. در حالت دوران یکنواخت، وابستگی سمتی و زمانی ویژه توابع به صورت $\exp\left(i\left(m\phi - \omega t\right)\right)$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین $\vec{v}'$ به صورت زیر خواهد شد:

$$v' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\xi = -i\left(\omega - m\Omega\right)\xi = -i\omega'\xi \quad (۲۶)$$

که در آن، $\omega' = \omega - m\Omega$. ω' فرکانس نوسانی در یک دستگاه در حال دوران است و ω بسامد در یک سامانه لختی است. با جایگذاری معادله (۲۶) در معادله (۲۴) خواهیم داشت:

$$-\omega'^2 \xi = 2i\omega'\vec{\Omega}\times\vec{\xi} - \vec{\nabla}\phi' + \frac{\rho'}{\rho^2}\vec{\nabla}P - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P' \qquad (۲۷)$$

اگر اثر اختلال کوچک باشد، می‌توان از روش اختلالی برای حل این معادله استفاده کرد.

۴. نتایج و بحث

۴-۱ حل معادله حرکت ستاره نوسان‌کننده سریع A_p به روش اختلالی

تعداد محدودی از مسائل مکانیک کوانتومی با هامیلتونی مستقل از زمان و یا وابسته به زمان وجود دارند که می‌توان آنها را به صورت دقیق حل کرد. برای حل این گونه مسائل از روش تقریبی استفاده می‌شود. ممکن است که به صورت عددی جواب معادله را با دقت قابل قبولی بدست آوریم، ولی فهم فیزیکی این جواب‌های تقریبی حتی قبل از محاسبات عددی، می‌تواند برای ما مهم باشد. یکی از روش‌هایی که می‌تواند ما را به این هدف سوق دهد روش اختلالی است [۱۸]. این روش مبتنی بر بسط ویژه کت‌ها و ویژه مقادیر انرژی بر حسب توان‌های مرتبه‌ی تقریب است. در مواردی که ویژه توابع غیراختلالی تبهگن باشند، بعد از اعمال اختلال، تبهگنی ویژه توابع ازبین می‌روند و ویژه توابع مختل شده ازترکیب خطی ویژه توابع غیراختلالی بدست می‌آیند.

برای حل معادله (۲۷) با استفاده از روش اختلالی ابتدا ویژه مقدار ω' و ویژه تابع ξ را بر حسب توان‌های Ω بسط می‌دهیم:

$$\omega' = \omega_k^{(0)} + \omega'^{(1)} + O(\Omega^2) \qquad (۲۸)$$

$$\xi = \xi_k^{(0)} + \xi^{(1)} + O(\Omega^2) \qquad (۲۹)$$

که در آن‌ها نخستین جمله طرف راست بیانگر k امین ویژه مُد بدون درنظر گرفتن دوران است. با جایگذاری معادلات (۲۸) و (۲۹) در معادله (۲۷) و چشم‌پوشی از جملات مرتبه‌ی دوم و بالاتر، جملات مرتبه صفر و اختلالی مرتبه اول ناشی از دوران ستاره را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$-\omega_k^{(0)2}\xi_k^{(0)} = -\vec{\nabla}\phi_k'^{(0)} + \frac{\rho_k'^{(0)}}{\rho^2}\vec{\nabla}P - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P_k'^{(0)} \qquad (۳۰)$$

$$-2\omega_k^{(0)}\omega'^{(1)}\xi_k^{(0)}-\omega_k^{(0)2}\xi^{(1)}=2i\omega_k^{(0)}\Omega\times\xi_k^{(0)}-$$
$$\vec{\nabla}\phi'^{(1)}+\frac{\rho'^{(1)}}{\rho^2}\vec{\nabla}P-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P'^{(1)}$$

برای حل معادله (۳۰) نسبت به $\omega'^{(1)}$ و $\xi^{(1)}$، ابتدا $\xi^{(1)}$ را بر حسب ویژه توابع $\xi_n^{(0)}$ بسط می‌دهیم (همچنین برای سایر جملات اختلالی به همین صورت)، یعنی $\xi^{(1)}=\sum_n a_n\xi_n^{(0)}$ که ضرائب a_n بسط را می‌توان ازاورتوگونال بودن ویژه توابع $\{\xi_n^{(0)}\}$ بدست آورد، یعنی $a_n=\int \xi_n^{(0)*}.\xi^{(1)}dM_r$. در این صورت برای معادله (۳۰) خواهیم داشت:

$$-2\omega_k^{(0)}\omega'^{(1)}\xi_k^{(0)}-\omega_k^{(0)2}\sum_n a_n\xi_n^{(0)}=2i\omega_k^{(0)}\Omega\times\xi_k^{(0)}-$$
$$\sum a_n\left(\vec{\nabla}\phi_n'^{(0)}+\frac{\rho_n'^{(0)}}{\rho^2}\vec{\nabla}P-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P_n'^{(0)}\right) \qquad (۳۱)$$

با جایگذاری معادله مرتبه صفر به جای جملات داخل پرانتز معادله (۳۱)، همان خواهیم داشت:

$$-2\omega_k^{(0)}\omega'^{(1)}\xi_k^{(0)}-\sum_n a_n\xi_n^{(0)}\left[\omega_k^{(0)2}-\omega_n^{(0)2}\right]=2i\omega_k^{(0)}\Omega\times\xi_k^{(0)} \qquad (۳۲)$$

با ضرب طرفین در $\xi_k^{(0)}$ و انتگرال‌گیری روی کل ستاره خواهیم داشت:

$$-2\omega_k^{(0)}\omega'^{(1)}\int_0^M\left|\xi_k^{(0)}\right|^2dM_r-\sum_n a_n\left[\omega_k^{(0)2}-\omega_n^{(0)2}\right]\int_0^M\xi_k^{(0)*}\xi_n^{(0)}dM_r=$$
$$2i\omega_k^{(0)}\int\left(\Omega\times\xi_k^{(0)}\right).\xi_k^{(0)*}dM_r \qquad (۳۳)$$

دومین جمله در طرف چپ در هر یک از حالات زیر صفر می شود:

برای $n\neq k$: شرط تعامد ξ ها $\qquad \int\xi_n^{(0)}\xi_k^{(0)*}dM_r=0$

برای $n=k$: اورتونرمال بودن ξ ها $\qquad \int\xi_n^{(0)*}\xi_n^{(0)}dM_r=1$

بنابر این خواهیم داشت:

$$\omega'^{(1)}=\frac{-i\int_0^M\left(\Omega\times\xi_k^{(0)}\right).\xi_k^{(0)*}dM_r}{\int_0^M\left|\xi_k^{(0)}\right|^2dM_r} \qquad (۳۴)$$

که اگر جابه‌جایی $\xi^{(0)}$ با $\omega^{(0)}\neq 0$ در مختصات قطبی کروی به صورت زیر تعریف شود:

$$\xi^{(0)} = \left[\xi_r^{(0)}, \xi_h^{(0)} \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{1}{Sin\theta} \xi_h^{(0)} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right] Y_l^m(\theta,\varphi)\, e^{-i\omega t} \qquad (۳۵)$$

با جایگذاری معادله (۳۹) در معادله (۳۸) خواهیم داشت:

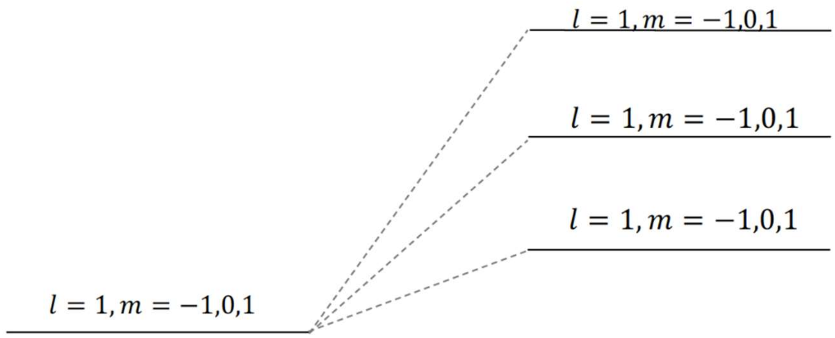
$$\omega'^{(1)} = -m\Omega C_{k,l} \qquad (۳۶)$$

که در آن، $C_{k,l}$ یک ثابت است و به مدل انتخابی و مُدهای مورد نظر بستگی دارد و برابر است با:

$$C_{k,l} = \frac{\int_0^R \left[2\xi_r^{(0)}\xi_h^{(0)} + \xi_h^{(0)} \right] \rho r^2 dr}{\int_0^R \left[\xi_r^{(0)2} + l(l+1)\xi_h^{(0)} \right] \rho r^2 dr} \qquad (۳۷)$$

معادلهِ (۳۶) نشان می‌دهد که فرکانس اختلالی ناشی از نیروی کوریولیس متناسب با سرعت زاویه‌ای و شاخص m هارمونیک کروی $Y_l^m(\theta,\phi)$ می‌باشد. بنابراین به ازای هر l مربوط به یک مُد(در حالت غیراختلالی)، $2l+1$ مُد در حالت اختلالی ناشی از دوران خواهیم داشت.

در غیاب دوران سه مُد مربوط به مقادیر مختلف m $(m=-1,0,1)$ تبهگن می‌باشند. با حضور دوران این تبهگني حذف مي‌شود. همان‌طور که در شکل (۱) نشان داده شده است، خط چین‌ها نشان‌دهنده این حقیقت‌اند که هر مُد اختلالی دررابطه با سه مُد غیراختلالي $m=-1,0,1$ می‌باشد. در حقیقت، تحت اختلال، تبهگنی ویژه توابع غیراختلالی تبهگن ازبین می‌روند و ویژه توابع مختل شده از ترکیب خطی ویژه توابع غیراختلالی بدست می‌آیند.



شکل ۱ آثار دوران بر روی مقادیر m در مد دوقطبی $(l = 1)$.

حال ویژه توابع را مورد بحث قرار می‌دهیم. برای آن که کامل بودن ویژه توابع برقرار باشد، یک مُد عرضی چنبره‌ای که $\omega=0$ در آن صدق می‌کند به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{\psi}_{l,m} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left(0, \frac{1}{Sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad (۳۸)$$

بنابراین، توابع $\xi_n^{(0)}$ باید شامل مُدهای قطبی، مُدهای P و g با $\omega \neq 0$، ونیز شامل مُدهای چنبره‌ای هم باشند. از این‌رو، جابه‌جایی اختلالی $\xi^{(1)}$ به صورت زیرخواهد شد:

$$\xi^{(1)} = \sum_n a_n^{(sph)} \xi_n^{(sph)} + \sum_{l',m'} b_{l',m'}(r) \psi_{l',m'} \qquad (۳۹)$$

که در آن، $a_n^{(sph)}$ ثابت و $b_{l',m'}$ توابعی از r هستند.

با جایگذاری رابطه (۳۹) در رابطه (۳۲) و ضرب طرفین در $\xi_n^{(sph)^*}$ و انتگرال گیری روی کل ستاره داریم:

$$a_n^{(sph)} = \frac{2\omega_k^{(0)}}{\omega_k^{(0)^2} - \omega_n^{(0)^2}} \frac{-i\int_0^M \left(\Omega \times \xi_k^{(0)}\right).\xi_n^{(sph)^*} dM_r}{\int_0^M \left|\xi_n^{(sph)}\right|^2 dM_r} \qquad (۴۰)$$

یا

$$a_n^{(sph)} = \frac{2\omega_k^{(0)}}{\omega_k^{(0)2} - \omega_n^{(0)2}} m\Omega\, D_{n,k,l} \qquad (۴۱)$$

که در آن،

$$D_{n,k,l} = \frac{\int_0^R \left[\left(\xi_r^{(0)}\right)_k \left(\xi_h^{(0)}\right)_n + \left(\xi_h^{(0)}\right)_k \left(\xi_r^{(0)}\right)_n + \left(\xi_h^{(0)}\right)_k \left(\xi_h^{(0)}\right)_n\right] \rho r^2 dr}{\int_0^R \left[\xi_r^{(0)2} + l(l+1)\xi_h^{(0)2}\right] \rho r^2 dr} \qquad (۴۲)$$

برای بدست آوردن $b_{l'm'}(r)$ به روش بالا عمل کرده و خواهیم داشت:

$$b_{l',m'}(r) = \frac{-2i}{\omega_k^{(0)}} \int_0^M \left(\Omega \times \xi_k^{(0)}\right) \psi_{l'm'}^* \rho r^2 dr\, d(Cos\theta) d\phi \qquad (۴۳)$$

که در آن،

$$\left(\Omega \times \xi_k^{(0)}\right) \psi_{l'm'}^* = -\Omega \Bigg[\frac{Cos\theta}{Sin^2\theta} \left(\xi_h^{(0)}\right)_k m^2 y y^* + Cos\theta \left(\xi_h^{(0)}\right)_k \frac{\partial}{\partial\theta} y \frac{\partial}{\partial\theta} y^* + Sin\theta \left(\xi_r^{(0)}\right)_k y \frac{\partial}{\partial\theta} y^* \Bigg]$$

که با تعریف کمیت‌های k_1، k_2 و k_3 به صورت زیر:

$$\begin{aligned} k_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} y_l^m \frac{\partial}{\partial\theta} y_{l'}^{m'*} Sin^2\theta\, d\theta d\phi \\ k_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} y_l^m y_{l'}^{m'*} \frac{Cos\theta}{Sin\theta} d\theta d\varphi \\ k_3 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Cos\theta Sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} y_l^m \frac{\partial}{\partial\theta} y_{l'}^{m'*} d\theta d\phi \end{aligned} \qquad (۴۴)$$

پس خواهیم داشت:

$$b_{l'm'}(r) = \frac{2i\Omega}{\omega_k^{(0)}} \left[\left(\xi_r^{(0)}\right)_k k_1 + \left(\xi_h^{(0)}\right)_k \left(k_2 m^2 + k_3\right)\right] \qquad (۴۵)$$

بدین ترتیب ضرائب ویژه توابع این معادله‌ی ویژه مقداری بدست می‌آید.

معادله‌ی ویژه مقداری (۳۷) به کمک روش اختلالی حل شد و ویژه فرکانس‌ها و ویژه توابع بدست آمد. تحت اثر دوران ، فرکانس مُدهای نوسانی در حالت غیراختلالی به ازای یک l به $2l+1$ مُد در حالت اختلالی جداسازی می‌شود و هر کدام از این مُدها مربوط به یک مقدار برای m نمی‌باشد. بلکه هر مُد ترکیبی از $m = 2l+1$ مُد می‌باشد. در حقیقت، تحت اثر اختلال بدست آمده از

دوران، تبهگنی ویژه توابع غیراختلالی ازبین می‌روند و ویژه توابع مختل‌شده ازترکیب خطی ویژه توابع غیراختلالی بدست می‌آیند و به اصطلاح گفته می‌شود مُدها بین خوشان کوپله می‌شوند.
لازم به توضیح است که در حقیقت این ستارگان تحت اثر دوران و میدان مغناطیسی می‌باشند و لازم است اثر هر دو بر بسامد نوسانات ستاره‌ای در نظر گرفته شود. افزون بر این همان طور که پیش از این گفته شد، می‌دانیم دوران ستاره منجر به حضور دو نیرو می‌شود، که عبارتند از نیروی کوریولیس و نیروی گریز از مرکز. درمورد ستاره‌های نوسان‌کننده سریع A_p نظر بر اینکه نیروی گریز از مرکز با Ω^2 متناسب است، پس اثر این نیرو بسیار مهم است، با این وجود نمی توان حضور نیروی کوریولیس را نادیده گرفت. چرا که این نیروتنها منبعی است که تقارن مسئله را مختل می‌کند. در مورد نقش نیروی گریز از مرکز و اهمیت حضور آن و نیز پیگیری این موضوع که میدان مغناطیسی چه تاثیری روی کوپلاژ و جداسازی مُدها می‌تواند داشته باشد بحث مفصلی است که بنا هست در آینده به آن پرداخته شود.

منابع

[1] Elkin, V.G., Mathys, G., Kurtz, D.W., Hubrig, S. and Freyhammer, L.M., "A rival for Babcock's star: the extreme 30-kG variable magnetic field in the Ap star HD 75049", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* 402(3), 1883-1891, 2010. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.16015.x

[2] Babcock, H. W., 1958, "Stellar magnetic fields", *Proceedings from IAU Symposium* no. 6, Cambridge University Press, p.16. http://adsabs.harvard.edu/abs/1958IAUS....6..161B

[3] Kurtz, D.W., "12.15 Minute Light Variations in Przybylski's Star, HD 101065", *Information Bulletin on Variable Stars, 1436,# 1.* 1436, 1978. https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1978IBVS.1436....1K

[4] Martinez, P., and Kurtz, D. W., "The Cape rapidly oscillating Ap star survey. II. Discovery of another six new roAp stars", *Mon. Not. R. Astron. Soc*., 271, 118–128, 1994a. https://doi.org/10.1093/mnras/271.1.118

[5] Kochukhov, O., Alentiev, D., Ryabchikova, T., Boyko, S., Cunha, M., Tsymbal, V. and Weiss, W., "Discovery of new roAp pulsators in the UVES survey of cool magnetic Ap stars", *arXiv preprint arXiv:1302.6585*, 2013. https://doi.org/10.1093/mnras/stt377

[6] Holdsworth, D.L., Smalley, B., Gillon, M., Clubb, K.I., Southworth, J., Maxted, P.F.L., Anderson, D.R., Barros, S.C.C., Cameron, A.C., Delrez, L. and Faedi, F., "High-frequency A-type pulsators discovered using SuperWASP", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* 439(2), 2078-2095, 2014. https://doi.org/10.1093/mnras/stu094

[7] Joshi, S., Martinez, P., Chowdhury, S., Chakradhari, N.K., Joshi, Y.C., van Heerden, P., Medupe, T., Kumar, Y.B. and Kuhn, R.B., "The Nainital-Cape Survey-IV", *arXiv preprint arXiv:1603.03517*, 2016. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527242

[8] Cunha, M.S., Antoci, V., Holdsworth, D.L., Kurtz, D.W., Balona, L.A., Bognár, Z., Bowman, D.M., Guo, Z., Kołaczek-Szymański, P.A., Lares-Martiz, M. and Paunzen, E., ,

"Rotation and pulsation in Ap stars: first light results from TESS sectors 1 and 2", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 487(3), 3523-3549, 2019. https://doi.org/10.1093/mnras/stz1332

[9] Hey, D. R., Holdsworth, D. L., Bedding, T. R., Murphy, S. J., Cunha, M. S., Kurtz, D. W., et al., , "Six new rapidly oscillating Ap stars in the Kepler long-cadence data using super-Nyquist asteroseismology", *Mon. Not. R. Astron. Soc*., 488, 18–36, 2019. https://doi.org/10.1093/mnras/stz1633

[10] Alentiev, D., Kochukhov, O., Ryabchikova, T., Cunha, M., Tsymbal, V. and Weiss, W., "Discovery of the longest period rapidly oscillating Ap star HD 177765", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters,* 421(1), L82-L86, 2012.

https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2011.01211.x

[11] Kurtz, D.W. and Seeman, J., "Frequency analysis of the rapidly oscillating Ap star HR 1217 (HD 24712)", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* 205(1), 11-22, 1983. https://doi.org/10.1093/mnras/205.1.11

[12] Kurtz, D.W., "Rapidly oscillating Ap stars." *IN: Annual review of astronomy and astrophysics. Vol. 28 (A91-28201 10-90). Palo Alto, CA, Annual Reviews, Inc.,* 28, 607-655, 1990. https://doi.org/10.1146/annurev.aa.28.090190.003135

[13] Gray, R. O., and Corbally, C. J., *Stellar Spectral Classification*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2009. https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691125114/stellar-spectral-classification

[14] Lüftinger, T., Kochukhov, O., Ryabchikova, T., Piskunov, N., Weiss, W. W., and Ilyin, I., "Magnetic Doppler imaging of the roAp star HD 24712", *Astron. Astrophys*., 509:A71, 2010. https://doi.org/10.1051/0004-6361/200811545

[15] Vauclair, S., Dolez, N., "Pulsations and chemical composition of main sequence magnetic stars", In *Progress of Seismology of the Sun and Stars: Proceedings of the Oji International Seminar Held at Hakone, Japan, 11–14 December 1989*, 399-403. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. https://doi.org/10.1007/3-540-53091-6_106

[16] Holdsworth, D. L., "The roAp Stars Observed by the *Kepler* Space Telescope", *Frontiers in Astronomy and Space Sciences,* 8*,* 626398*,* 2021*.* https://doi.org/10.3389/fspas.2021.626398

[17] Shibahashi, H., "Magnetic overstability as exitation Mechanism of the rapid oscillations of Ap stars", *the Astrophysical journal*, 275, L5-L9, 1983. https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/1983ApJ...275L...5S/doi:10.1086/184160

[18] Sakurai, J. J., Jim, Napolitano, "Modern Quantum Mechanics, second edition", *Addison Wesley publishing*, 303-310, 1994. https://kgut.ac.ir/useruploads/1505647831850hcd.pdf