

Research Paper

The Effect of the Generalized Uncertainty Principle with Maximum Length on the Size of White Dwarfs¹

Sajad Parsamehr²

Received: 2024.10.11

Revised: 2025.01.12

Accepted: 2025.01.18

1. Introduction

The development of a theory of quantum gravity faces a challenge arising from the fundamentally different ways the two theories describe physical systems. Quantum mechanics operates on discrete, probabilistic principles, while general relativity is a continuous, deterministic theory. The generalized uncertainty principle is a modified version of the Heisenberg uncertainty principle that incorporates quantum gravitational corrections for systems with strong gravity. At the Planck scale, the effects of quantum gravity become significant. At this scale, the impact of quantum mechanics and gravity are expected to be equally important. In white dwarfs, the degeneracy pressure provides the necessary support against gravitational collapse; however, it has been shown that the generalized uncertainty principle, in the presence of a minimum length, negates the Chandrasekhar limit and allows white dwarfs to grow to any size, which contradicts astrophysical observations. This paper introduces a new formalism to recover the Chandrasekhar limit and resolve the discrepancy between theory and observation.

2. Methodology

This paper refines the relationship between degeneracy pressure and density in white dwarfs using an alternative form of the uncertainty principle that includes the maximum length. It addresses this problem using the extended uncertainty principle (EUP) while considering the maximum length. The effects of the maximum length on the total energy and electron degeneracy pressure in white dwarfs are investigated. It is observed that the size of white dwarfs appears smaller due to the mass-radius relationship, which is consistent

¹ <https://doi.org/10.22051/ijap.2025.48511.1428>

² Assistant Professor, Department of Physics, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran. Email: sajadparsamehr@gmail.com

<https://jap.alzahra.ac.ir>



with observational data. In the second part of the paper, we introduce the formalism of the generalized uncertainty principle. The contradiction related to the size of white dwarfs in theory and observational data is discussed in the third part. The fourth part is dedicated to using the generalized uncertainty principle with the maximum length to resolve the discrepancy between theory and astrophysical observations.

3. Results and Discussion

The Chandrasekhar limit is a fundamental constraint on the maximum mass that a white dwarf can have. In this paper, we review the findings of previous studies that suggest the Generalized Uncertainty Principle (GUP) with a positive parameter predicts the existence of white dwarfs of infinite size, which is contrary to observations. In other words, the strange phenomenon in this case is that the radius of white dwarfs seems to increase dramatically as their mass increases. This phenomenon suggests that gravitational collapse into a black hole may not occur. One suggested approach to address these inconsistencies is to allocate a negative value to the GUP parameter. The innovative methodology outlined in this paper leverages the Extended Uncertainty Principle (EUP) with a defined maximum length, leading to a notable correlation with astrophysical observational data.

4. Conclusion

According to the Generalized Uncertainty Principle in the presence of maximum length, it is observed that as the mass of a white dwarf increases, its radius decreases, which is consistent with observations. It is also noted that with increasing density in a white dwarf, the degeneracy pressure increases to prevent gravitational collapse. Recent research on the sign change of the GUP and EUP parameters has been presented, suggesting that by considering the role of the cosmological constant in the uncertainty principle, the issue of sign change appears to be more acceptable. Given that the cosmological constant can take both negative and positive values, this consideration is meaningful from both a physical and geometric perspective and has important consequences.

Keywords: *Generalized Uncertainty Principle, Quantum Gravity, Chandrasekhar Limit, White Dwarfs, Maximum Length.*

References

- [1] Snyder, H.S., "Quantized space-time", Physical Review 71(1), 38, 1947. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.38>.
- [2] Mead, C.A., "Possible connection between gravitation and fundamental length", Physical Review 135(3B), B849, 1964. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.135.B849>.



- [3] Amati, D., Ciafaloni, M. and Veneziano, G., "Superstring collisions at Planckian energies", *Physics Letters B* 197(1-2), 81-88, 1987. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90346-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90346-7).
- [4] Capozziello, S., Lambiase, G. and Scarpetta, G., "Generalized uncertainty principle from quantum geometry", *Int. J. Theor. Phys.*, 39, 15–22, 2000. <https://doi.org/10.1023/A:1003634814685>.
- [5] Maggiore, M., "A generalized uncertainty principle in quantum gravity", *Physics Letters B* 304(1-2), 65-69, 1993. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)91401-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91401-8).
- [6] Kempf, A., Mangano, G. and Mann, R.B., "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation", *Physical Review D* 52(2), 1108, 1995. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1108>.
- [7] Scardigli, F., "Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment", *Physics Letters B* 452(1-2), 39-44, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00167-7](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00167-7).
- [8] Scardigli, F. and Casadio, R., "Generalized uncertainty principle, extra dimensions and holography", *Classical and Quantum Gravity* 20(18), 3915, 2003. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/20/18/305>.
- [9] Bizet, N.C., Obregón, O. and Yupanqui, W., "Modified entropies as the origin of generalized uncertainty principles", *Physics Letters B* 836, 137636, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137636>.
- [10] Ali, A.F. and Wojnar, A., "A covariant tapestry of linear GUP, metric-affine gravity, their Poincaré algebra and entropy bound", *Classical and Quantum Gravity* 41(10), 105001, 2024. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad3ac7>.
- [11] Bishop, M., Lee, J. and Singleton, D., "Modified commutators are not sufficient to determine a quantum gravity minimal length scale", *Physics Letters B* 802, 135209, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135209>.
- [12] Contreras, E. and Bargueño, P., "Scale-dependent Hayward black hole and the generalized uncertainty principle", *Modern Physics Letters A* 33(32), 1850184, 2018. <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732318501845>.
- [13] Pedram, P., "A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum II: Applications", *Physics Letters B* 718(2), 638-645, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.07.005>.
- [14] Bouaziz, D. and Ferkous, N., "Hydrogen atom in momentum space with a minimal length", *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 82(2), 022105, 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.82.022105>.
- [15] Brau, F. and Buisseret, F., "Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well", *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 74(3), 036002, 2006. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.74.036002>.

- [16] Nozari, K. and Etemadi, A., "Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics", *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 85(10), 104029, 2012. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.104029>.
- [17] Yu, B. and Long, Z.W., "Black hole evaporation and its remnants with the generalized uncertainty principle including a linear term", *Communications in Theoretical Physics* 76(2), 025404, 2024. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1572-9494/ad1b49>.
- [18] Benhadjira, A., Benkrane, A., Bentouila, O., Benzair, H. and Aiadi, K.E., "One dimensional Bose–Einstein condensate under the effect of the extended uncertainty principle", *Physica Scripta* 99(5), 055224, 2024. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1402-4896/ad3864>.
- [19] Baradaran, M., Nieto, L.M. and Zarrinkamar, S., "On some quantum correction to the Coulomb potential in generalized uncertainty principle approach", *Physics Letters B* 852, 138603, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138603>.
- [20] Tang, M., "Weak cosmic censorship conjecture and black hole shadow for black hole with generalized uncertainty principle", *The European Physical Journal C* 84(4), 396, 2024. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-12641-9>.
- [21] Ong, Y.C., "A critique on some aspects of GUP effective metric", *The European Physical Journal C* 83(3), 209, 2023. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11360-x>.
- [22] Perivolaropoulos, L., "Cosmological horizons, uncertainty principle, and maximum length quantum mechanics", *Physical Review D* 95(10), 103523, 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.103523>.
- [23] Skara, F. and Perivolaropoulos, L., "Primordial power spectra of cosmological fluctuations with generalized uncertainty principle and maximum length quantum mechanics", *Physical Review D* 100(12), 123527, 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.123527>.
- [24] Mureika, J.R., "Extended uncertainty principle black holes", *Physics Letters B* 789, 88-92, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.12.009>.
- [25] Bensalem, S. and Bouaziz, D., "On the thermodynamics of relativistic ideal gases in the presence of a maximal length", *Physics Letters A* 384(36), 126911, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126911>.
- [26] Bensalem, S. and Bouaziz, D., "Statistical description of an ideal gas in maximum length quantum mechanics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 523, 583-592, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.02.033>.
- [27] Ong, Y.C., "Generalized uncertainty principle, black holes, and white dwarfs: a tale of two infinities", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018(09), 015, 2018. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/09/015>.



- [28] Low, A.M., "Space-time is doomed! Introducing Planck scale physics in the classroom", *Physics Education* 59(1), 015013, 2023. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/acfe54>.
- [29] Griffiths, D.J. and Schroeter, D.F., *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2019.
- [30] Schürmann, T., "Uncertainty principle on 3-dimensional manifolds of constant curvature", *Foundations of Physics* 48, 716-725, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10701-018-0173-0>.
- [31] Pachoł, A., "Generalized Extended Uncertainty Principles, Liouville theorem and density of states: Snyder-de Sitter and Yang models", *Nuclear Physics B*, 116771, 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.05110>
- [32] Ahmadi, S., Yusofi, E. and Ramzanpour, M.A., "Incorporating the cosmological constant in a modified uncertainty principle", *Modern Physics Letters A* 39(27n28), 2450125, 2024. <https://doi.org/10.1142/S0217732324501256>
- [33] Ong, Y.C., "Schwinger pair production and the extended uncertainty principle: can heuristic derivations be trusted?", *The European Physical Journal C* 80(8), 777, 2020. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8363-2>

تأثیر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با طول بیشینه بر اندازه کوتوله‌های سفید^۱

سجاد پارسامهر^۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۰

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۱۰/۲۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۹

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال پانزدهم، پیاپی ۴۰، بهار ۱۴۰۴

صص ۳۵ - ۵۰

چکیده:

چالش در توسعه نظریه گرانش کوانتومی ناشی از روش‌های اساسی متفاوتی است که این دو نظریه برای شرح سامانه‌های فیزیکی به کار می‌برند. مکانیک کوانتومی بر اساس اصول گسسته و احتمالی عمل می‌کند، در حالی که نسبیت عام یک نظریه پیوسته و قطعی است. اصل عدم قطعیت تعمیم یافته یک نسخه اصلاح شده از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است که اصلاحات گرانشی کوانتومی را در سامانه‌هایی با گرانش قوی اعمال می‌کند. نمونه بارزی از این سامانه‌ها کوتوله‌های سفید هستند. در کوتوله‌های سفید فشار تبهگنی پشتیبانی لازم را در برابر فروپاشی گرانشی فراهم می‌کند. با این وجود، نشان داده شده است که اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در حضور طول کمینه، حد چاندراسخار را نقی می‌کند و به کوتوله‌های سفید اجازه می‌دهد تا به هر اندازه نامحدودی بزرگ شوند، که این خود در تضاد با مشاهدات اختر فیزیکی می‌باشد. این مقاله رابطه بین فشار تبهگنی و چگالی در کوتوله‌های سفید را با استفاده از یک شکل جایگزین از اصل عدم قطعیت که بیشینه طول را در برمی‌گیرد، اصلاح می‌کند. ما نشان می‌دهیم که این فرمالیزم جدید حد چاندراسخار را بازیابی می‌کند و اختلاف بین نظریه و مشاهده را برطرف می‌کند.

واژگان کلیدی: اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، گرانشی کوانتومی، حد چاندراسخار، کوتوله‌های سفید، طول بیشینه.

^۱ <https://doi.org/10.22051/ijap.2025.48511.1428>

^۲ استادیار، گروه فیزیک، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران. Email: sajadparsamehr@gmail.com



۱. مقدمه

امروزه به صورت گسترده‌ای پذیرفته شده است که یک ناسازگاری اساسی بین نسبیت عام و مکانیک کوانتومی وجود دارد. گرانش کوانتومی یک چارچوب نظری است که به دنبال شرح نیروی گرانشی در زمینه مکانیک کوانتومی است. هدف آن آشتی دادن نسبیت عام است که گرانش را در مقیاس بزرگ بیان می‌کند، با فیزیک کوانتومی که رفتار ذرات را در کوچک‌ترین مقیاس‌ها کنترل می‌کند. این یک چالش مهم در فیزیک جدید است، چرا که این دو نظریه بر اساس اصول بسیار متفاوت عمل می‌کنند. از همان ابتدا مشهود بود که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ^۱ (HUP) برای توضیح تأثیر گرانش باید مورد تجدید نظر قرار گیرد. در نتیجه لازم بود که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ اصلاح شود تا اثرات گرانشی را در برگیرد [۱-۲]. از این رو، نظریه‌های مختلفی چون نظریه ریسمان، گرانش کوانتومی حلقه‌ای و مطالعات مربوط به سیاهچاله‌ها، تعمیم‌هایی را برای اصل عدم قطعیت هایزنبرگ پیشنهاد کرده‌اند، که به عنوان اصل عدم قطعیت تعمیم یافته^۲ (GUP) شناخته می‌شود [۳-۸]. یکی از پیامدهای GUP پیش‌بینی یک طول کمینه است که به عنوان کمینه طول شناخته می‌شود. این طول کمینه از روابط جابه‌جایی اصلاح شده بین عملگرهای موقعیت و تکانه در مکانیک کوانتومی ناشی می‌شود که منجر به یک محدودیت اساسی در دقتی می‌شود که با آن می‌توان هر دو کمیت را به صورت همزمان اندازه‌گیری کرد. این ایده پیامدهای جدیدی در حوزه‌های مختلف فیزیک نظری و به‌ویژه در مکانیک کوانتومی دارد [۹-۲۱].

در سال‌های کنونی، یک اصل جدید عدم قطعیت توسعه یافته (EUP)^۳ معرفی شده که دارای بیشینه طول است [۲۲]. افق ذرات کیهانی نشان‌دهنده دورترین فاصله‌ای است که می‌توانیم در گستره وسیع کیهان مشاهده کنیم. وجود یک مقیاس طول بیشینه قابل مشاهده، نیازمند تصحیح عدم قطعیت کوانتومی در مقیاس‌های بزرگ است و رفتار غیرمحلی مکانیک کوانتومی این اصلاحات را در مقیاس‌های کیهانی قابل قبول می‌سازد. به بیان دیگر، با توجه به موضعی نبودن مکانیک کوانتومی، ویژگی‌های عام کیهان می‌تواند نشانه‌ای بر رفتار سامانه‌های کوانتومی موضعی باشد. مطالعات گوناگونی برای بررسی اثرات عدم قطعیت تعمیم یافته با وجود طول بیشینه در حوزه‌های مختلف فیزیک انجام شده است [۲۳-۲۶].

¹ Heisenberg Uncertainty Principle

² Generalized Uncertainty Principle

³ Extended uncertainty principle



کوتوله سفید بقایای ستاره‌ای است، که وقتی ستاره‌ای با جرم کم تا متوسط سوخت هسته‌ای خود را تخلیه می‌کند و لایه‌های بیرونی خود را می‌ریزد، به وجود می‌آید. هسته‌ای که باقی می‌ماند بسیار متراکم و داغ است که بیشتر از کربن و اکسیژن تشکیل شده است. کوتوله‌های سفید معمولاً به اندازه زمین هستند اما دارای جرمی قابل مقایسه با جرم خورشید هستند. حد چاندراسخار آستانه‌ای بحرانی در اخترفیزیک است که بیشینه جرمی را که یک ستاره کوتوله سفید قبل از فروپاشی گرانشی به یک ستاره نوترونی یا سیاهچاله می‌تواند داشته باشد را، مشخص می‌کند. این حد کمابیش $1/4$ برابر جرم خورشید است، که به جرم چاندراسخار شناخته می‌شود. در کوتوله‌های سفید، نیروی گرانش به سمت داخل با نیروی به سمت بیرون فشار تبهگنی الکترون متعادل می‌شود، که از اصل طرد پائولی ناشی می‌شود.

فشار تبهگنی یک پدیده مکانیکی کوانتومی است که در سامانه‌های فرمیون‌ها چون الکترون‌ها، نوترون‌ها یا سایر ذرات که از اصل طرد پائولی پیروی می‌کنند، به وجود می‌آید. این اصل بیان می‌کند که هیچ دو فرمیون یکسان نمی‌توانند به صورت همزمان یک حالت کوانتومی را اشغال کنند. در نتیجه، وقتی تعداد زیادی فرمیون در حجم کمی محدود می‌شوند، همگی نمی‌توانند پایین‌ترین حالت‌های انرژی را اشغال کنند. در عوض، آنها باید حالت‌های انرژی بالاتری را اشغال کنند، که فشاری ایجاد می‌کند که در برابر فشرده‌سازی بیشتر مقاومت می‌کند. فشار تبهگنی در اخترفیزیک بسیار مهم است، زیرا نقش کلیدی در پایداری کوتوله‌های سفید و ستاره‌های نوترونی ایفا می‌کند و از فروپاشی آن‌ها به سیاهچاله‌ها تحت گرانش خود جلوگیری می‌کند.

در چارچوب GUP، کوتوله‌های سفید از دید نظری اجازه می‌یابند به دلیل افزایش فشار تبهگنی به اندازه‌های فوق العاده بزرگ، بدون فروپاشی گرانشی رشد کنند [۲۷]، که این مسأله با مشاهدات موجود در اخترفیزیک تناقض دارد. این اختلاف بین پیش‌بینی‌های GUP و رفتار مشاهده شده کوتوله‌های سفید، تضاد بالقوه بین مفاهیم نظری اثرات گرانش کوانتومی و شواهد تجربی از مشاهدات اخترفیزیکی را برجسته می‌کند.

به تازگی برای برطرف کردن این مشکل پیشنهاداتی ارائه شده است به صورتی که این اختلاف را می‌توان با وارد کردن یک کمیت منفی در اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با وجود طول کمینه اصلاح کرد. در حالی که تجزیه و تحلیل ارائه شده در [۲۷]، تا حد زیادی ابتکاری است و ممکن است خیلی دقیق نباشد، یک دیدگاه ساده در مورد چگونگی تأثیر GUP بر فیزیک کوتوله‌های سفید با کمینه پیچیدگی ریاضی ارائه می‌دهد.

در این مقاله با استفاده از EUP و با در نظر گرفتن طول بیشینه به حل این مشکل پرداخته شده است. تاثیرات طول بیشینه بر انرژی کل و فشار تبهگنی الکترون‌ها در کوتوله‌های سفید بررسی شده است. با توجه به رابطه بین جرم و شعاع کوتوله‌های سفید مشاهده شده است که اندازه آن‌ها کوچک‌تر به نظر می‌رسند و این با مشاهدات رصدی سازگار می‌باشد. در بخش دوم مقاله به معرفی فرمالیزم اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته پرداخته‌ایم. تضاد مرتبط با اندازه کوتوله‌های سفید در نظریه و داده‌های رصدی در بخش سوم بررسی شده است. بخش چهارم به استفاده از اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته با طول بیشینه برای برطرف کردن اختلاف بین نظریه و مشاهدات اختر فیزیکی اختصاص یافته است. در آخرین بخش نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲. فرمالیزم اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته

در مقیاس پلانک اثرات گرانش کوانتومی قابل توجه می‌شوند. در این مقیاس، انتظار می‌رود که اثرات مکانیک کوانتومی و گرانش به یک اندازه مهم باشند. GUP پیشنهاد می‌کند که در مقیاس‌های بسیار کوچک، مانند مقیاس‌های نزدیک به طول پلانک، عدم قطعیت در موقعیت و تکانه نه تنها با محدودیت‌های مکانیکی کوانتومی استاندارد محدود می‌شود، بلکه تحت تأثیر عوامل اضافی نیز قرار می‌گیرد. این می‌تواند به کمینه طول قابل اندازه‌گیری و بیشینه تکانه قابل اندازه‌گیری منجر شود، به این معنی که عدم قطعیت در این اندازه‌گیری‌ها از پایه به روشی پیچیده‌تر از آنچه پیش از این درک شده بود در هم تنیده شده‌اند. رابطه مربوط به اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته با وجود طول کمینه و اندازه حرکت کمینه به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۶, ۱۷]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha (\Delta x)^2 + \beta (\Delta p)^2), \quad (1)$$

که در آن، α و β به عنوان کمیت‌های GUP شناخته می‌شوند. همانطور که می‌توان از گرانش کوانتومی انتظار داشت، تحلیل ابعادی عبارت‌های تصحیحی در معادله بالا نشان می‌دهد که این کمیت‌ها تنها تصحیحات کوانتومی نیستند. اگر تنها ثابت پلانک و طول پلانک را در نظر بگیریم [۲۸]، از نظر ابعادی متوجه می‌شویم که باید روابط مربوط به کمیت‌های α و β به شکل $\alpha \propto \frac{1}{l_p^2}$ و $\beta \propto \frac{l_p^2}{\hbar^2} = \frac{1}{G\hbar}$ باشند.

همچنین می‌توان گفت که معادله (۱) به محدودیت‌های تحمیل شده با استفاده از استدلال‌های گرانش کوانتومی و کیهان‌شناختی در جداسازی مقیاس‌های طول و تکانه اشاره دارد. استدلال‌های گرانشی کوانتومی وجود یک مقیاس طول کمینه را نشان می‌دهند که پس از آن مفاهیم شناخته شده طول



معنای خود را از دست می‌دهند. از سوی دیگر، استدلال‌های کیهان‌شناسی وجود مقیاس‌های بیشینه طول و کمینه تکانه را پیشنهاد می‌کنند که درک ما از کیهان را در مقیاس‌های خیلی بزرگ محدود می‌سازد.

با انتخاب $\alpha = 0$ برابر با الگوهای استاندارد GUP با طول کمینه، رابطه (۱) می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta (\Delta p)^2), \quad (2)$$

رابطه جابه‌جایی مرتبط با معادله (۲) عبارت است از:

$$[x, p] = i\hbar(1 - \beta p^2). \quad (3)$$

کمیت GUP معمولاً در محاسبات نظری از مرتبه واحد در نظر گرفته می‌شود. این بدان معناست که هرگونه تغییر در اصل عدم قطعیت تنها در مقیاس پلانک قابل توجه می‌شود. به بیانی دیگر، اثرات اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در هنگام برخورد با فواصل بسیار کوچک یا انرژی‌های بالا، مانند آنچه در مقیاس پلانک با آن مواجه می‌شوند، بارزتر و مرتبط هستند.

نوع دیگری از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با در نظر گرفتن $\beta = 0$ ارائه گردیده است. در این رویکرد، بیشینه طول گرانش کوانتومی به صورت طبیعی در کیهان‌شناسی به دلیل وجود افق‌های ذرات به وجود می‌آید. برای یکی کردن EUP در چارچوب مکانیک کوانتومی، لازم است روابط جبری عملگرهای موقعیت و تکانه اصلاح شوند:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \alpha (\Delta x)^2), \quad (4)$$

در رابطه بالا، $\alpha = l_{max}^{-2} \simeq (\frac{H_0}{c})^2$ می‌باشد، به صورتی که H_0 کمیت هابل و c سرعت نور است. رابطه جابه‌جایی سازگار با آن به شکل زیر می‌باشد:

$$[x, p] = \frac{i\hbar}{1 - \alpha x^2}. \quad (5)$$

به صورت کلی می‌توان گفت که اگرچه اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ممکن است به پیامدهای نظری جالبی در حوزه‌های مختلف فیزیک، از جمله مکانیک کوانتومی، ترمودینامیک و مثال ویژه‌ای که در اینجا مورد بررسی قرار می‌گیرد، یعنی بررسی کوتوله‌های سفید، منجر شود. اگرچه، این پیامدها باید با داده‌های رصدی و الگوهای اخترفیزیکی موجود نیز تطبیق داده شوند تا سازگاری لازم با درک ما از جهان حقیقی بدست آید.

۳. ناسازگاری بین نظریه و داده‌های رصدی در مورد اندازه کوتوله‌های سفید

به منظور مشاهده اثرات GUP، لازم است سامانه‌ای انتخاب شود که گرانش در آن به اندازه کافی قوی باشد. یک سامانه مناسب برای مطالعه این اثرات، در ستارگان فشرده مانند کوتوله‌های سفید است. این اجرام اخترفیزیکی محیط‌هایی را فراهم می‌کنند که در آن نیروهای گرانشی شدید هستند و امکان بروز اثرات گرانش کوانتومی پیش‌بینی شده با استفاده از GUP در آن‌ها وجود دارد. هنگامی که GUP برای کوتوله‌های سفید اعمال می‌شود، منجر به ویژگی عجیبی می‌شود که در آن حد چاندرااسخار، بیشینه جرمی را که یک کوتوله سفید می‌تواند قبل از سقوط به یک ستاره نوترونی یا سیاهچاله داشته باشد، دیگر وجود ندارد. این نشان می‌دهد که بر اساس GUP، کوتوله‌های سفید با اندازه نامحدود، می‌توانند بدون رسیدن به حد چاندرااسخار وجود داشته باشند. در این بخش به بررسی و تبیین این موضوع خواهیم پرداخت.

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ ، که موقعیت (x) و تکانه (p) را به هم مرتبط می‌کند، به ما این امکان را می‌دهد تا ویژگی‌های ویژه‌ای از کوتوله‌های سفید را بررسی کنیم. این اجرام آسمانی بقایای ستارگانی هستند که تحت فشار تبهگنی الکترونی نگه داشته می‌شوند. انرژی جنبشی کل یک کوتوله سفید برابر است با:

$$E_k = \frac{N \Delta p^2}{2m_e} \simeq \frac{N \hbar^2}{2m_e \Delta x^2} \quad (6)$$

که در آن، N تعداد الکترون‌ها و m_e جرم الکترون می‌باشد. بر حسب چگالی $n = \frac{N}{V} = \frac{M}{m_e V}$ (M جرم کل ستاره) و حجم ستاره ($V \sim R^3$) و رابطه $\Delta x \simeq n^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ (معادله ۶) باز نویسی می‌شود:

$$E_k = \frac{N \hbar^2 n^{\frac{2}{3}}}{2m_e} = \frac{N \hbar^2}{2m_e} \left(M^{\frac{2}{3}} m_e^{-\frac{2}{3}} R^{-2} \right) = \frac{M^{\frac{5}{3}} \hbar^2}{2m_e^{\frac{8}{3}} R^2}, \quad (7)$$

برای جلوگیری از فروپاشی گرانشی، متعادل کردن انرژی جنبشی با انرژی گرانشی ضروری است:

$$|E_g| \sim \frac{G M^2}{R} = E_k \quad (8)$$

معادله (۷) را در معادله (۸) قرار می‌دهیم، بنابراین می‌توان رابطه شعاع و جرم ستاره را به صورت زیر بدست آورد:

$$R \sim \frac{\hbar^2}{2m_e^{\frac{8}{3}} G M^{\frac{5}{3}}}, \quad (9)$$



یعنی در حقیقت، $R \propto M^{-\frac{1}{3}}$ می باشد. همچنین در شکل (۱) مشاهده می شود که رابطه بین جرم و شعاع یک کوتوله سفید به گونه ای است که با افزایش جرم، اندازه آن کاهش می یابد.

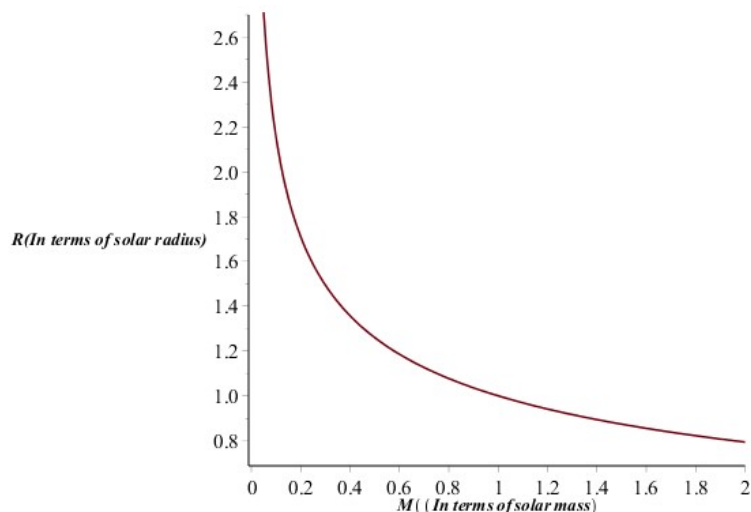


Fig. 1 Radius versus mass plot for a white dwarf, showing that its size decreases as its mass increases. (The axes of the plots are in terms of the solar radius $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$, and the solar mass $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$.)

شکل ۱ نمودار شعاع بر حسب جرم برای یک کوتوله سفید که نشان می دهد با افزایش جرم آن، اندازه آن کاهش می یابد. (واحد محورهای نمودارها بر حسب شعاع خورشیدی $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ و جرم خورشیدی $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$ می باشند.)

در ادامه به بررسی نقش اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و تاثیر آن بر حد چاندرا سکار پرداخته می شود. با استفاده از معادله (۲) Δp ، به صورت زیر بدست می آید:

$$\Delta x \Delta p - \frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} \beta (\Delta p)^2 \simeq 0, \quad (10)$$

با حل این معادله درجه دو بر حسب Δp داریم:

$$\Delta p \simeq \frac{\Delta x}{2\hbar\beta} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta\hbar^2}{\Delta x^2}} \right], \quad (11)$$

در حالی که علامت جلوی جذر را می توان به صورت قطعی انتخاب کرد، معمولاً برای درک بهتر بیان ریاضی هر دو علامت در ابتدا حفظ می شود. با انجام محاسبات سر راست و استفاده از شرایط تعادل گرانشی مانند آنچه که در بالا بیان شد، رابطه بین جرم و شعاع به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$|E_g| \sim \frac{GM^2}{R} = E_k = \frac{N\Delta p^2}{2m_e} \quad (12)$$

کافی است که Δp^2 بدست آمده از رابطه (۱۱) را در معادله (۱۲) قرار دهیم، همچنین با توجه به معادلات $n = \frac{N}{V} = \frac{M}{m_e V}$ و $\Delta x \simeq n^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ خواهیم داشت:

$$M^{\frac{5}{3}} \sim \frac{1}{8 G m_e^{\frac{4}{3}} \beta^2 \hbar^2} R^3 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta \hbar^2 M^{\frac{2}{3}}}{m_e^{\frac{2}{3}} R^2}} \right)^2 \quad (13)$$

اگر $G = \hbar = c = 1$ و نیز $m_e = 1$ آنگاه می توان نوشت:

$$M^{\frac{5}{3}} \sim \frac{R^3}{8 \beta^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta M^{\frac{2}{3}}}{R^2}} \right)^2 \quad (14)$$

اگر β به اندازه کافی کوچک باشد، می توان با بسط تا مرتبه اول β ، عبارت زیر رادیکال، رابطه (۱۴) را به شکل زیر نوشت:

$$M^{\frac{5}{3}} \sim \frac{R^3}{8 \beta^2} \left(1 \pm \left(1 - \frac{2\beta M^{\frac{2}{3}}}{R^2} \right) \right)^2 \quad (15)$$

حالا می بینیم که باید جلوی رادیکال علامت منفی را انتخاب کنیم تا به رابطه مشابه رابطه بین جرم و شعاع در حالت عدم قطعیت معمولی برسیم:

$$M^{\frac{5}{3}} \sim \frac{R^3}{8 \beta^2} \left(\frac{2\beta M^{\frac{2}{3}}}{R^2} \right)^2 = \frac{M^{\frac{4}{3}}}{2R} \quad (16)$$

یعنی، $R \propto M^{-\frac{1}{3}}$ که رابطه مشابه با رابطه بین جرم و شعاع در حالت عدم قطعیت معمولی است. برای معادله (۱۴) با علامت منفی نمودار تغییرات شعاع بر حسب جرم در شکل (۲) نشان داده شده است. نمودار شکل (۲) و دیگر نمودارها با استفاده از نرم افزار میپل، بخش مربوط به رسم توابع ضمنی، رسم شده اند.

همانطور که پیش از این بیان شد با افزایش جرم، ستاره به فروپاشی گرانشی نزدیک می شود، در نتیجه با توجه به نمودارهای شکل های (۱) و (۲) در می یابیم که در حالت معمولی (شکل (۱))، یک کوتوله سفید همچنان کوچک تر می شود تا زمانی که به مرز چاندراسهکار می رسد که فراتر از آن فروپاشی گرانشی دوباره ادامه می یابد. در حالت GUP (شکل (۲))، در نقطه ای کوتوله سفید در برابر فروپاشی مقاومت می کند و به صورت نامحدود رشد می کنند. اینکه چگونه یک انحراف کوچک از اصل عدم قطعیت، سبب چنین انحراف بزرگی برای ستارگان پر جرم می شود، تعجب آور



است. منحنی شکل (۲) بیانگر این حقیقت است که GUP به کوتوله‌های سفید اجازه می‌دهد تا هر اندازه‌ای بزرگ شوند، این نگران کننده است. نکته دیگری که در اینجا دارای اهمیت است این است که، سیاهچاله‌ها ممکن است به دلیل افزایش فشار تبهگنی GUP که در برابر فروپاشی مقاومت می‌کند، تشکیل نشوند. اگر این مطلب درست باشد، با مشاهدات مربوط به تعداد زیاد سیاهچاله‌ها در کیهان تفاوت دارد. در مرجع [۲۷] پیشنهاد شده است که با انتخاب کمیت GUP با علامت منفی، ممکن است مشکل را حل کرد. برابر با آنچه که در شکل (۳) نمایش داده شده است، اگر در معادله (۱۴) علامت کمیت را منفی در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که منحنی به حالت استاندارد یعنی وقتی که GUP وجود ندارد، شباهت پیدا می‌کند.

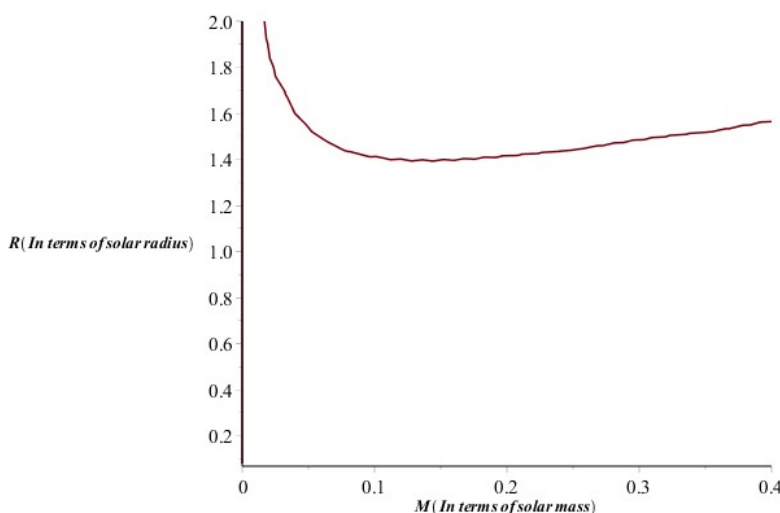


Fig. 2 Radius versus mass plot for a white dwarf with GUP correction. Initially, the size of the white dwarf decreases with increasing mass, then it recovers and can grow to an unlimited size. (The axes of the plots are in terms of the solar radius

$$R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m \text{ and the solar mass } M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg.)$$

شکل ۲ نمودار شعاع بر حسب جرم برای یک کوتوله سفید با تصحیح GUP. در ابتدا، اندازه کوتوله سفید با افزایش جرم کاهش می‌یابد، سپس برمی‌گردد و می‌تواند به اندازه نامحدودی رشد کند. (واحد محورهای نمودارها بر حسب شعاع خورشیدی $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ و جرم خورشیدی $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$ می‌باشند.)

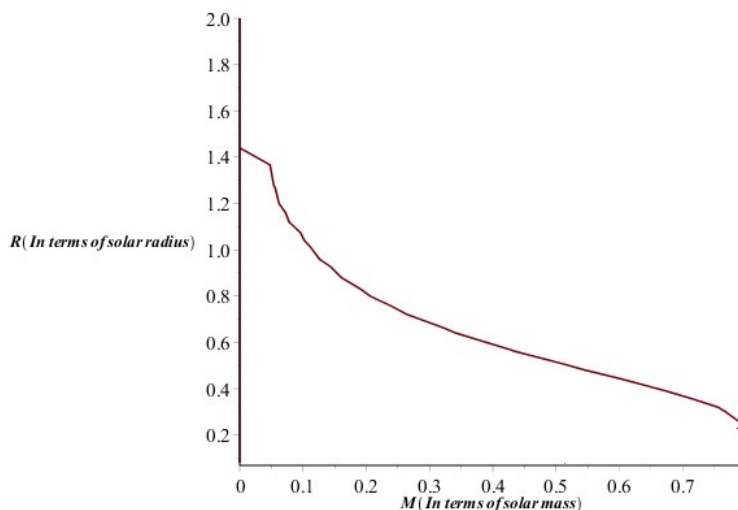


Fig. 3 Radius versus mass plot of a white dwarf incorporating the Generalized Uncertainty Principle (GUP) correction with a negative parameter. (The axes of the plots are in terms of the solar radius $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ and the solar mass $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$.)

شکل ۳ نمودار شعاع بر حسب جرم یک کوتوله سفید با گنجاندن اصلاح اصل عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP) با کمیت منفی. (واحد محورهای نمودارها بر حسب شعاع خورشیدی $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ و جرم خورشیدی $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$ می باشند.)

نمودار شکل (۳) تنها یک تغییر جزئی را در مقایسه با نمودار ایجاد شده در حالت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ معمولی (شکل (۱)) نشان می دهد. نمودار آخر، حدی را در جرم بیشینه ایجاد می کند و از وجود کوتوله های سفید فراتر از این جرم بیشینه جلوگیری می کند. در بخش بعدی به معرفی راه حل جدید که مبتنی بر استفاده از نوع جدیدتری از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته، جهت رفع مشکل تضاد بین داده های رصدی و نظریه است، پرداخته ایم.

۴. طول بیشینه و اندازه کوتوله های سفید

در این بخش، از EUP با وجود طول بیشینه استفاده می کنیم، که در آن بیشینه طول بر اساس افق ذرات کیهانی مشخص می شود. به عبارتی EUP تعمیمی از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ است که اثرات گرانش کوانتومی را در خود جای داده است. با استخراج بیشینه طول از افق ذرات کیهانی، بزرگترین مقیاس فاصله ممکن در جهان را به عنوان یک حد اساسی در محاسبات خود در نظر می گیریم. این رویکرد به ما اجازه می دهد تا، مفاهیم گرانش کوانتومی را در مقیاس های کیهانی



بررسی کنیم و رفتار ذرات و سامانه ها را در زمینه کل جهان درک کنیم. با توجه به معادله (۴) می توان Δp را به صورت زیر بدست آورد:

$$\Delta p \simeq \frac{\hbar}{2 \Delta x} (1 + \alpha \Delta x^2), \quad (17)$$

اگر این عبارت را در معادله مربوط به انرژی کل قرار دهیم آنگاه داریم:

$$E_k = \frac{N \Delta p^2}{2m_e} \simeq \frac{N}{2m_e} \frac{\hbar^2}{4 \Delta x^2} (1 + \alpha \Delta x^2)^2 \quad (18)$$

با در نظر گرفتن جملات تا مرتبه اول α داریم:

$$E_k \simeq \frac{N}{2m_e} \frac{\hbar^2}{4 \Delta x^2} (1 + 2\alpha \Delta x^2), \quad (19)$$

می توان مانند قبل با استفاده از روابط $n = \frac{N}{V} = \frac{M}{m_e V}$ و $\Delta x \simeq n^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}}$ معادله بالا را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$E_k \simeq \frac{N}{8m_e} \frac{\hbar^2}{n^{-\frac{2}{3}}} \left(1 + 2\alpha n^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{N \hbar^2}{8m_e} \left(n^{\frac{2}{3}} + 2\alpha\right) = \frac{N \hbar^2}{8m_e} \left(M^{\frac{2}{3}} m_e^{\frac{2}{3}} R^{-2}\right) + \frac{N \hbar^2}{8m_e} (2\alpha), \quad (20)$$

در نتیجه E_k برابر است با:

$$E_k \simeq \frac{\hbar^2}{8m_e^{\frac{5}{3}} R^2} M^{\frac{5}{3}} + \frac{\alpha \hbar^2}{4m_e^2} M. \quad (21)$$

با اعمال شرط تعادل گرانشی $|E_g| \sim \frac{G M^2}{R} = E_k$ پس از انجام محاسبات، رابطه بین شعاع و جرم به صورت زیر بدست می آید:

$$\left(\frac{\hbar^2}{4m_e^2}\right) \alpha M^{-1} R^2 - GR + \frac{\hbar^2}{8m_e^{\frac{5}{3}}} M^{-\frac{1}{3}} \simeq 0 \quad (22)$$

در صورتی که $G = \hbar = c = 1$ و $m_e = 1$ باشند، آنگاه:

$$\left(\frac{\alpha M^{-1}}{4}\right) R^2 - R + \frac{1}{8} M^{-\frac{1}{3}} \simeq 0, \quad (23)$$

نمودار شعاع و جرم برای ستاره در این حالت در شکل (۴) نشان داده شده است.



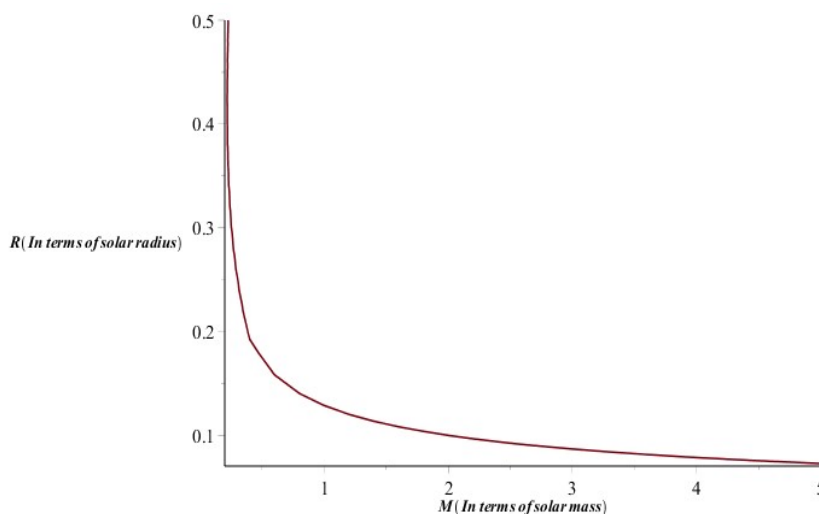


Fig. 4 Radius versus mass diagram of a white dwarf with EUP correction. (The axes of the plots are in terms of the solar radius $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ and the solar mass $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$.)

شکل ۴ نمودار شعاع بر حسب جرم یک کوتوله سفید با تصحیح EUP. (واحد محورهای نمودارها بر حسب شعاع خورشیدی $R_{\odot} = 6.960 \times 10^8 m$ و جرم خورشیدی $M_{\odot} = 1.98892 \times 10^{30} kg$ می باشند.)

همانطور که در شکل دیده می شود، شعاع کوتوله های سفید با افزایش جرم آن ها کاهش می یابد. این یافته با آنچه در مشاهدات اختریفیزیکی مشاهده می شود، سازگار است. برای بدست آوردن درک بهتری از نتیجه بدست آمده و همچنین چگونگی تأثیر مکانیک کوانتومی و گرانش بر یکدیگر لازم است، فشار تبهگنی به عنوان یک اثر مکانیک کوانتومی (زمانی ایجاد می شود که ذراتی مانند الکترون ها در کوتوله های سفید، چنان متراکم شوند که از اصل طرد پائولی پیروی کنند) مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به شکل (۵)، در حالت معمولی رابطه فشار تبهگنی با چگالی به صورت $p \sim \rho^{\frac{5}{3}}$ می باشد [۲۹]، اما با در نظر گرفتن EUP و انجام محاسبات مربوطه، مشاهده می شود که رابطه بین این دو به $p \sim (1 + \alpha)\rho^{\frac{5}{3}}$ تغییر یافته است.



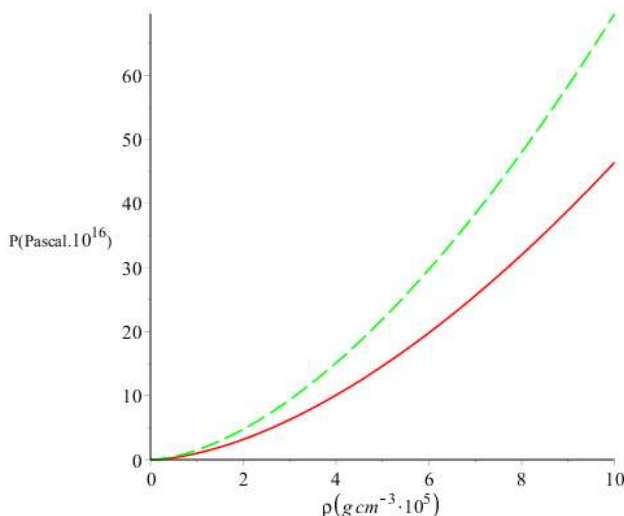


Fig. 5 Pressure p versus density ρ for a white dwarf (red diagram for the standard state and green (dashed line) considering EUP).

شکل ۵ نمودار فشار p بر حسب چگالی ρ برای کوتوله سفید (نمودار قرمز حالت استاندارد و سبز (خط تیره) با در نظر گرفتن EUP).

در یک سامانه با چگالی بالا، چون یک کوتوله سفید، ذرات به صورت نزدیک به هم فشرده می شوند، که این رخداد منجر به فشار تبهگنی بالایی می شود. این فشار با نیروی گرانشی که برای فروپاشی بیشتر ستاره تلاش می کند، مقابله خواهد کرد. همانطور که در شکل (۵) مشاهده می شود، با افزایش چگالی، اختلاف فشار تبهگنی بین دو مدل افزایش می یابد.

۵. نتیجه گیری

رابطه بین حد چاندراسخار، کوتوله های سفید و فشار تبهگنی در این حقیقت نهفته است که وقتی یک کوتوله سفید به حد چاندراسخار نزدیک می شود، فشار تبهگنی دیگر نمی تواند بر نیروی گرانشی غلبه کند که منجر به فروپاشی کوتوله سفید می شود. از این رو، حد چاندراسخار، محدودیتی اساسی برای بیشینه جرمی که یک کوتوله سفید می تواند داشته باشد. در این مقاله، یافته های پژوهش های پیشین مبنی بر اینکه GUP با یک کمیت مثبت، وجود کوتوله های سفید با اندازه نامحدود که خلاف مشاهدات است را پیش بینی می کنند، مرور شد. به بیانی دیگر، پدیده عجیبی که در این مورد رخ می دهد این است، که شعاع کوتوله های سفید با افزایش جرم آن ها به نظر می رسد که جهش می یابند. این پدیده نشان می دهد که فروپاشی گرانشی به یک سیاهچاله ممکن

است رخ ندهد. برای رفع این ناسازگاری‌ها، راه حل پیشنهاد شده این است که کمیت GUP دارای یک مقدار منفی باشد. اما راه حل جدید ارائه شده در این مقاله مبتنی بر استفاده از EUP با در نظر گرفتن طول بیشینه می‌باشد. نتایج بدست آمده در این حالت سازگاری خوبی با داده‌های رصدی اختر فیزیکی داشت. با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم یافته در حضور طول بیشینه، ملاحظه می‌شود که با افزایش جرم کوتوله سفید شعاع آن کاهش می‌یابد که این در سازگاری با مشاهدات می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش چگالی در یک کوتوله سفید، فشار تبهگنی نیز افزایش یافته تا مانع فروپاشی گرانشی شود. پژوهش‌های جدیدی در مورد تغییر علامت کمیت GUP و EUP به تازگی ارائه شده است، به صورتی که با در نظر گرفتن نقش ثابت کیهان‌شناسی در اصل عدم قطعیت، ظاهراً موضوع تغییر علامت قابل پذیرش تر شده است. با توجه به اینکه ثابت کیهان‌شناسی هر دو علامت منفی و مثبت را می‌پذیرد، این موضوع از لجاظ فیزیکی و هندسی نیز معنادار بوده و دارای پیامدهای مهمی می‌باشد [۳۳-۳۰].

۶. تقدیر و تشکر

این مقاله توسط دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمانشاه پشتیبانی شده است.

منابع

- [1] Snyder, H.S., "Quantized space-time", *Physical Review* 71(1), 38, 1947. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.71.38>.
- [2] Mead, C.A., "Possible connection between gravitation and fundamental length", *Physical Review* 135(3B), B849, 1964. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.135.B849>.
- [3] Amati, D., Ciafaloni, M. and Veneziano, G., "Superstring collisions at Planckian energies", *Physics Letters B* 197(1-2), 81-88, 1987. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(87\)90346-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(87)90346-7).
- [4] Capozziello, S., Lambiase, G. and Scarpetta, G., "Generalized uncertainty principle from quantum geometry", *Int. J. Theor. Phys.*, 39, 15-22, 2000. <https://doi.org/10.1023/A:1003634814685>.
- [5] Maggiore, M., "A generalized uncertainty principle in quantum gravity", *Physics Letters B* 304(1-2), 65-69, 1993. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(93\)91401-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)91401-8).
- [6] Kempf, A., Mangano, G. and Mann, R.B., "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation", *Physical Review D* 52(2), 1108, 1995. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.1108>.
- [7] Scardigli, F., "Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment", *Physics Letters B* 452(1-2), 39-44, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00167-7](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00167-7).



- [8] Scardigli, F. and Casadio, R., "Generalized uncertainty principle, extra dimensions and holography", *Classical and Quantum Gravity* 20(18), 3915, 2003. <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/20/18/305>.
- [9] Bizet, N.C., Obregón, O. and Yupanqui, W., "Modified entropies as the origin of generalized uncertainty principles", *Physics Letters B* 836, 137636, 2023. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137636>.
- [10] Ali, A.F. and Wojnar, A., "A covariant tapestry of linear GUP, metric-affine gravity, their Poincaré algebra and entropy bound", *Classical and Quantum Gravity* 41(10), 105001, 2024. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/ad3ac7>.
- [11] Bishop, M., Lee, J. and Singleton, D., "Modified commutators are not sufficient to determine a quantum gravity minimal length scale", *Physics Letters B* 802, 135209, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135209>.
- [12] Contreras, E. and Bargueño, P., "Scale-dependent Hayward black hole and the generalized uncertainty principle", *Modern Physics Letters A* 33(32), 1850184, 2018. <http://dx.doi.org/10.1142/S0217732318501845>.
- [13] Pedram, P., "A higher order GUP with minimal length uncertainty and maximal momentum II: Applications", *Physics Letters B* 718(2), 638-645, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.07.005>.
- [14] Bouaziz, D. and Ferkous, N., "Hydrogen atom in momentum space with a minimal length", *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics* 82(2), 022105, 2010. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.82.022105>.
- [15] Brau, F. and Buisseret, F., "Minimal length uncertainty relation and gravitational quantum well", *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 74(3), 036002, 2006. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.74.036002>.
- [16] Nozari, K. and Etemadi, A., "Minimal length, maximal momentum, and Hilbert space representation of quantum mechanics", *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* 85(10), 104029, 2012. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.85.104029>.
- [17] Yu, B. and Long, Z.W., "Black hole evaporation and its remnants with the generalized uncertainty principle including a linear term", *Communications in Theoretical Physics* 76(2), 025404, 2024. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1572-9494/ad1b49>.
- [18] Benhadjira, A., Benkrane, A., Bentouila, O., Benzair, H. and Aiadi, K.E., "One dimensional Bose-Einstein condensate under the effect of the extended uncertainty principle", *Physica Scripta* 99(5), 055224, 2024. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1402-4896/ad3864>.
- [19] Baradaran, M., Nieto, L.M. and Zarrinkamar, S., "On some quantum correction to the Coulomb potential in generalized uncertainty principle approach", *Physics Letters B* 852, 138603, 2024. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138603>.
- [20] Tang, M., "Weak cosmic censorship conjecture and black hole shadow for black hole with generalized uncertainty principle", *The European Physical Journal C* 84(4), 396, 2024. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-024-12641-9>.
- [21] Ong, Y.C., "A critique on some aspects of GUP effective metric", *The European Physical Journal C* 83(3), 209, 2023. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-11360-x>.
- [22] Perivolaropoulos, L., "Cosmological horizons, uncertainty principle, and maximum length quantum mechanics", *Physical Review D* 95(10), 103523, 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.103523>.
- [23] Skara, F. and Perivolaropoulos, L., "Primordial power spectra of cosmological fluctuations with generalized uncertainty principle and maximum length quantum mechanics", *Physical Review D* 100(12), 123527, 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.123527>.
- [24] Mureika, J.R., "Extended uncertainty principle black holes", *Physics Letters B* 789, 88-92, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.12.009>.



- [25] Bensalem, S. and Bouaziz, D., "On the thermodynamics of relativistic ideal gases in the presence of a maximal length", *Physics Letters A* 384(36), 126911, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126911>.
- [26] Bensalem, S. and Bouaziz, D., "Statistical description of an ideal gas in maximum length quantum mechanics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 523, 583-592, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.02.033>.
- [27] Ong, Y.C., "Generalized uncertainty principle, black holes, and white dwarfs: a tale of two infinities", *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2018(09), 015, 2018. <https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2018/09/015>.
- [28] Low, A.M., "Space-time is doomed! Introducing Planck scale physics in the classroom", *Physics Education* 59(1), 015013, 2023. <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/acfe54>.
- [29] Griffiths, D.J. and Schroeter, D.F., *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge university press, 2019.
- [30] Schürmann, T., "Uncertainty principle on 3-dimensional manifolds of constant curvature", *Foundations of Physics* 48, 716-725, 2018. <https://doi.org/10.1007/s10701-018-0173-0>.
- [31] Pachoł, A., "Generalized Extended Uncertainty Principles, Liouville theorem and density of states: Snyder-de Sitter and Yang models", *Nuclear Physics B*, 116771, 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.05110>
- [32] Ahmadi, S., Yusofi, E. and Ramzanpour, M.A., "Incorporating the cosmological constant in a modified uncertainty principle", *Modern Physics Letters A* 39(27n28), 2450125, 2024. <https://doi.org/10.1142/S0217732324501256>
- [33] Ong, Y.C., "Schwinger pair production and the extended uncertainty principle: can heuristic derivations be trusted?", *The European Physical Journal C* 80(8), 777, 2020. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-8363-2>



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

